

SERIE A, N°  
N° D'ORDRE :

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Bernard BONNIER

**1<sup>re</sup> THESE.** — Contribution à l'étude théorique de l'interaction  
méson  $\pi$  - méson  $\pi$  "

**2<sup>o</sup> THESE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5/2/1971 devant la Commission d'examen.

MM. M. LEVY *Président.*

R. NATAF

R. VINH MAU

A. MARTIN

M. FROISSART

} *Examineurs.*



SERIE A, N°  
N° D'ORDRE :

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Bernard BONNIER

---

**1<sup>re</sup> THESE.** — Contribution à l'étude théorique de l'interaction  
méson  $\pi$  - méson  $\pi$  "

**2<sup>e</sup> THESE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5/2/1971 devant la Commission d'examen.

MM. M. LEVY *Président.*

R. NATAF

R. VINH MAU

A. MARTIN

M. FROISSART

} *Examineurs.*



à Chantal



## -REMERCIEMENTS-

Ce travail a été effectué sous la direction du professeur R.Vinh Mau : je suis heureux de pouvoir lui dire ici combien ses conseils m'ont été précieux tout au long de cette recherche.

Je remercie également le professeur A.Martin pour l'intérêt qu'il a bien voulu témoigner à ces travaux, ce qui a grandement favorisé leur développement.

Je suis très reconnaissant au professeur M.Lévy d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse, et aux professeurs M.Froissart et R.Nataf d'y participer.

Une partie des résultats présentés ici ont été obtenus au cours d'une étroite et amicale collaboration avec P.Gauron, attaché de recherche au C.N.R.S. Je le remercie très vivement, ainsi que les physiciens et les visiteurs du laboratoire avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions.

Les calculs numériques ont été effectués sur l'Univac 1108 d'Orsay et sur la CDC 6600 de Paris. Je remercie ici pour leur aide les membres de ces bureaux de calcul, et notamment Mlle A.Commault.

Enfin, je suis très reconnaissant à Mlle M.Moreau du soin qu'elle a apporté à la présentation matérielle de ce travail.



## TABLE DES MATIERES

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I - INTRODUCTION .....                                                                                        | 1  |
| II - CINEMATIQUE DE LA DIFFUSION PION-PION.<br>GENERALITES SUR LE CROISEMENT, L'ANALYTICITE ET L'UNITARITE... | 9  |
| III - LIMITE INFERIEURE DE LA VARIATION DES DEPHASAGES AVEC<br>L'ENERGIE.....                                 | 21 |
| IV - BORNES INFERIEURES DE LA LONGUEUR DE DIFFUSION DE L'ONDE S....                                           | 41 |
| V - STRUCTURE DES ONDES PARTIELLES S ET D ET ETUDE DE LEUR<br>PARAMETRISATION DANS UNE THEORIE NEUTRE .....   | 51 |
| VI - EXTENSION DES METHODES PREDECENTES A L'ETUDE DE L'INTER-<br>ACTION PION-PION A BASSE ENERGIE .....       | 67 |
| VII - CONCLUSION .....                                                                                        | 84 |

### APPENDICES

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| A - PROPRIETES GENERALES DES ONDES PARTIELLES .....        | 87 |
| B - CONTRAINTES LIANT LES ONDES PARTIELLES S, P ET D ..... | 95 |
| C - PARAMETRISATION DE LA COUPURE DE GAUCHE .....          | 98 |

|                  |     |
|------------------|-----|
| REFERENCES ..... | 106 |
|------------------|-----|

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| LEGENDE DES TABLEAUX - TABLEAUX ..... | 110 |
|---------------------------------------|-----|

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| LEGENDE DES FIGURES - FIGURES ..... | 118 |
|-------------------------------------|-----|



## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

C'est en 1955 que les relations de dispersion furent introduites en physique des hautes énergies par Goldberger<sup>(1)</sup> qui amorçait ainsi l'étude des propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion. A cette époque un grand nombre de résultats furent assez rapidement obtenus dans cette direction, au point que vers 1960 était entrevue la possibilité de déterminer la matrice  $S$  au moyen de ses seules propriétés d'analyticité, d'unitarité et de croisement<sup>(2)</sup>. Mais par la suite le ralentissement très perceptible de cette progression devait tempérer quelque peu les espoirs fondés dans la réalisation de ce programme dont l'aboutissement éventuel apparaît aujourd'hui encore comme un but lointain.

Toutefois, il ressort des informations accumulées au cours de la dernière décennie que dans son état de développement actuel, ce cadre impose dès à présent de sévères limitations au comportement des grandeurs physiques. Ces limitations prennent une importance particulière dans le cas de la diffusion pion-pion puisque cette dernière, alors même qu'elle joue un rôle fondamental dans les interactions fortes, semble par sa simplicité relative fournir le meilleur épanouissement à ce type d'approche. C'est précisément dans cette optique que se situe cette étude des contraintes imposées à l'interaction pion-pion à basse énergie par la combinaison de l'analyticité, de l'unitarité et de la symétrie de croisement.

Les travaux qui ont été effectués dans le cadre général de la matrice  $S$  peuvent être classés en deux grandes catégories. On peut en effet regrouper d'une part l'ensemble des résultats



rigoureusement acquis et d'autre part les tentatives d'exploitation pratique de ces résultats, tentatives qui restent tributaires d'un certain nombre d'approximations ou d'hypothèses surimposées.

Il convient d'ailleurs de distinguer parmi les résultats rigoureux ceux qui proviennent de l'utilisation d'un domaine d'analyticité postulé, comme c'est le cas pour la représentation de Mandelstam, de ceux qui sont déduits de la seule combinaison de la théorie axiomatique des champs et de l'unitarité. Bien que dans ce dernier cas le domaine résultant soit plus restreint, c'est de lui uniquement que proviennent les informations, dues à A. Martin notamment, qui sont utilisées tout au long de notre travail. Nous en rappellerons l'essentiel au deuxième chapitre.

Une autre particularité des résultats rigoureux actuels est qu'ils s'appliquent assez souvent aux valeurs prises par les observables sur des parties de leur domaine de définition qui ne sont pas expérimentalement accessibles. On peut citer par exemple le cas des théorèmes asymptotiques ou bien encore celui des contraintes qui s'exercent entre un nombre fini d'ondes partielles pour certaines valeurs complexes de l'impulsion. Cette particularité est à l'origine des tentatives qui ont pour objet la prévision, approchée mais explicite, des valeurs prises par les observables sur leur domaine physique. Le modèle d'amplitude pion-pion proposé en 1960 par Chew et Mandelstam<sup>(3)</sup> peut être considéré comme le prototype de ces travaux.

A leur tour, nos résultats peuvent être groupés en deux parties qui reflètent successivement chacune de ces deux grandes tendances. En effet, dans la première partie (chapitres III et IV) nous démontrons que la variation des déphasages avec l'énergie — et en particulier la longueur de diffusion de l'onde S — ne peut



excéder une limite inférieure qui s'exprime rigoureusement en fonction de la masse du pion comme seul paramètre. Par contre, c'est par l'intermédiaire de modèles d'ondes partielles, exposés dans la deuxième partie (chapitres V et VI) que nous obtenons d'autres informations concernant les modes d'interaction pion-pion compatibles avec l'ensemble des contraintes rigoureuses déjà évoqué.

Les résultats de la première partie doivent être rapprochés de ceux qui, en théorie du potentiel, ont été obtenus par E.P. Wigner<sup>(4)</sup> puis par G.J. Goebel, R. Karplus et M.A. Rudermann<sup>(5)</sup> dans le cas relativiste, à la condition toutefois que l'interaction soit strictement nulle au delà d'une certaine distance. Comme nous le verrons au troisième chapitre, l'interprétation causale de Wigner-Eisenbud<sup>(4)</sup> permet d'attribuer un rôle fondamental à cette restriction.

Celle-ci ne peut cependant pas être directement reliée à la notion de portée finie introduite en théorie des interactions fortes, où la portée est donnée par la longueur d'onde de Compton des objets de plus basse masse qui peuvent être échangés dans l'interaction.

A notre connaissance il n'existait d'ailleurs pas de résultat comparable à celui de Wigner dans le cadre de la théorie axiomatique des champs, bien que celle-ci, ignorant les particules de masse nulle, n'introduise pas de portée infinie. En fait, cette remarque est liée à celle que nous rapportons au deuxième chapitre à propos du domaine d'analyticité de l'amplitude, tel qu'il avait été originellement délimité par H. Lehmann<sup>(6)</sup>. Nous verrons en effet que ces limites semblent trop étroites pour pouvoir refléter l'hypothèse initiale de forces à portée finie. Par contre, cette hypothèse se trouve traduite de façon satisfaisante dans le domaine établi par A.Martin à l'aide de la positivité déduite de l'unitarité<sup>(7)</sup>.



Il était alors envisageable d'obtenir le théorème de Wigner dans ce contexte : la démonstration que nous avons pu en fournir est exposée au troisième chapitre<sup>(8)</sup>. En fait, celui-ci débute par le rappel d'un résultat dû à L. Lukaszuk et A. Martin<sup>(9)</sup> qui est à la base même de notre travail. Ces derniers, en associant intensivement l'unitarité et la symétrie de croisement, ont en effet pu exhiber des bornes absolues de l'amplitude neutre pion-pion sur une partie de son domaine non physique.

Le rapport associant ces bornes à celles des dérivées des déphasages apparaîtra clairement par la suite. Cependant, on peut déjà remarquer que toutes deux attribuent une limite inférieure à la longueur de diffusion de l'onde S, lorsque l'énergie prend sa valeur physique minimale. Le théorème démontré par Wigner ne permet d'ailleurs pas d'atteindre ce résultat. Au contraire, la borne proposée est alors fonction de la longueur de diffusion, qui doit être spécifiée par quelque caractéristique propre à l'interaction. Ce point est abordé au quatrième chapitre, qui est précisément consacré aux diverses améliorations que l'on peut apporter à la limite de cette longueur de diffusion, sans toutefois envisager le cas de chaque isospin pris séparément. Ceci pouvait être traité de façon assez semblable, comme l'a montré par la suite A.K. Common<sup>(10)</sup>.

En particulier, nous nous placerons provisoirement dans le contexte d'une amplitude satisfaisant à la représentation de Mandelstam. Dans ce cas, notre méthode restitue simplement un des résultats déjà obtenus par A. Bincer et B. Sakita<sup>(11)</sup>. Nous supposons donc de plus que la fonction spectrale double est positive, ce qui semble le moyen le plus évident d'assurer la positivité. La contrainte obtenue est alors la plus forte, ce qui corrobore certains travaux de A. Martin<sup>(12)</sup> et F.J. Yndurain<sup>(13)</sup>.

Cette étude marque la fin de la première partie, qui



illustre bien la puissance des contraintes impliquées dans le cadre de la matrice  $S$ . En effet, si l'on considère la généralité des informations employées, l'ordre de grandeur des limites obtenues peut paraître assez surprenant. Sur un plan plus pratique, nous devrons pourtant constater qu'elles ne peuvent pas encore fournir le critère d'une éventuelle discrimination entre les résultats expérimentaux actuels. Comme nous le verrons, ceci peut dans une certaine mesure être imputé à l'utilisation souvent partielle de l'unitarité, sous sa seule forme de positivité par exemple.

Nous avons alors décidé—et ceci peut caractériser les travaux de la seconde partie — d'ajouter aux informations précédentes le contenu de l'unitarité élastique. Sur la base de l'expérience<sup>(14)</sup>, cet apport peut s'avérer essentiel à basse énergie. Il semble en effet que les processus inélastiques ne soient importants qu'au delà du seuil  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ , notablement plus lointain que le seuil théorique, fixé à la production de quatre pions.

Compte tenu de nos moyens actuels, le traitement exact de l'unitarité élastique ne s'avère possible que sur des modèles d'ondes partielles. On peut citer par exemple la méthode  $N/D$  qui ramène le problème à celui de la donnée de la discontinuité de l'onde partielle à travers sa coupure de gauche, qui se voit ainsi attribuer le rôle fondamental de "potentiel". Malheureusement, cette discontinuité demeure très peu connue et pendant longtemps la symétrie de croisement n'a pu être rigoureusement traduite au niveau des ondes partielles. Comme dans le modèle de Chew et Mandelstam déjà cité, cette situation a fréquemment suscité le recours à l'approximation. Pourtant, en ce domaine, celle-ci peut avoir des conséquences assez désastreuses. On sait par exemple que l'application systématique de la symétrie de croisement à une amplitude réduite à un nombre fini d'ondes partielles fournit une section efficace identiquement nulle<sup>(15)</sup>.



L'approche que nous développons dans la seconde partie est une tentative pour échapper à ce genre de difficultés. Les informations dont nous disposons pour cela proviennent essentiellement de trois sources. D'une part, nous les avons déjà évoqués, les travaux de A. Martin<sup>(15)</sup> fournissent un ensemble de contraintes déduites du croisement et de la positivité. D'autre part, ceux de R. Roskies<sup>(16)</sup> permettent de traduire les conditions de croisement en termes d'ondes partielles. Enfin, nous pourrions en associant unitarité, comportement normal au seuil et croisement, obtenir quelques informations exactes concernant la discontinuité des ondes partielles à travers leur coupure de gauche.

Dans un premier temps, nous étudions les conséquences induites par ces contraintes sur les modèles d'ondes partielles neutres S et D qui sont construits au cinquième chapitre<sup>(17)</sup>. Nos conclusions rejoignent alors celles de O. Piguet et G. Wanders<sup>(18)</sup>, en ce sens que l'arbitraire laissé à ces paramétrisations apparaît relativement faible. Cette étude suggère donc la possibilité d'un certain recouvrement des valeurs prises à basse énergie par les nombreuses amplitudes mises en évidence par D. Atkinson<sup>(19)</sup>, puisque ce dernier a pu démontrer que les conditions simultanées d'analyticité, de croisement et d'unitarité pouvaient être satisfaites par une infinité d'amplitudes dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables réelles.

De plus, le prolongement sur la région physique des modèles précédents pour les valeurs sélectionnées des paramètres fournit alors des déphasages qui se groupent par classes bien distinctes. Cette méthode semblait donc pouvoir être appliquée à l'étude de la diffusion pion-pion dans son ensemble à basse énergie, pour contribuer à éclaircir une situation expérimentale encore confuse.

Nous avons progressé dans cette direction en trois étapes qui sont rassemblées au dernier chapitre<sup>(20)</sup>. Chacune



d'elles peut être essentiellement caractérisée par l'inclusion de nouvelles ondes partielles : d'abord les ondes S, puis les ondes S et l'onde P, enfin l'ensemble des ondes S, P et D. Comme nous le verrons, cette progression s'est imposée pour deux raisons principalement puisqu'à chaque fois nous pouvons d'une part améliorer la représentation de la coupure de gauche et d'autre part augmenter le nombre des relations qui couplent ces ondes partielles. Nos modèles peuvent alors être déterminés avec une grande précision, ce qui apparaît indispensable pour en réaliser un prolongement significatif jusqu'à une énergie de l'ordre de celle du  $\rho$ . En ce sens, ce n'est qu'au niveau des ondes S, P et D que nous avons rencontré l'équilibre satisfaisant entre le nombre des paramètres introduits et celui des contraintes disponibles. En d'autres termes, cette approche ne permet de déterminer une onde partielle donnée que dans la mesure où l'on en détermine globalement tout un ensemble.

Le  $\rho$  n'apparaît d'ailleurs pas systématiquement dans les ensembles que l'on peut ainsi sélectionner, en se limitant à l'usage des informations rigoureuses actuellement disponibles. Nous avons été amenés à restreindre les degrés de liberté de l'onde P en imposant l'existence de ce méson, qui demeure l'élément le moins controversé de l'interaction pion-pion. L'on peut faire ici le bilan de l'apport expérimental à ce travail : hypothèse de l'unitarité élastique dominante, position et largeur de la résonance  $\rho$ .

Notre but n'est donc pas de réaliser un nouveau type de bootstrap de ce méson dans le cadre de la matrice S. Au contraire, nous voulons dégager les familles de déphasages simultanément compatibles en regard des implications connues de nos hypothèses théoriques et présentant une onde P correctement résonnante, au sens phénoménologique du terme. Nous examinons en particulier les ondes S qui apparaissent solutions de ce problème. Cette méthode peut donc être comparée aux tentatives qui utilisent les in-



formations expérimentales sur l'onde P combinées à l'analyticité et au croisement pour atteindre les ondes S, par les techniques du prolongement analytique notamment<sup>(21)</sup>. Il ne sera donc pas surprenant de constater un accord certain dans les prévisions qu'apportent ces deux approches.



## CHAPITRE II

Cinématique de la diffusion pion-pion.

Généralités sur le croisement, l'analyticité et l'unitarité.

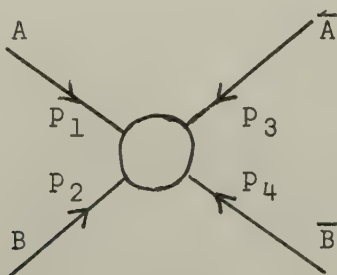
### I - Cinématique pion-pion et symétrie de croisement.

Les processus considérés sont du type  $A+B \rightarrow A+B$ , où A et B désignent deux particules sans spin et de même masse  $\mu$ , qui sera choisie pour unité. Par invariance par rotation autour de la normale au plan de diffusion, l'amplitude ne dépend que de deux variables, par exemple l'impulsion  $k$  et l'angle de diffusion  $\theta$  dans le système du centre de masse.

Cependant, la symétrie de croisement conduit à considérer à la fois les réactions

$$\begin{aligned} A+B &\rightarrow A+B \\ A+\bar{B} &\rightarrow A+\bar{B} \\ A+\bar{A} &\rightarrow B+\bar{B} \end{aligned} ,$$

où  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  désignent les antiparticules de A et de B respectivement. Il est alors commode de décrire les amplitudes à l'aide des quadriimpulsions entrantes  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  associées aux différentes particules comme l'indique le schéma ci-dessous.





Ces quatre invariants sont liés par les relations exprimant la conservation de l'énergie-impulsion et l'appartenance des particules à la couche de masse, c'est-à-dire :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$$

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \mu^2 = 1 .$$

Les variables de Mandelstam sont alors définies par :

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 \quad (\text{II.1})$$

$$u = (p_1 + p_4)^2 .$$

La diffusion  $A+B \rightarrow A+B$  est maintenant désignée par "voie s", la variable s étant dans ce cas égale au carré de l'énergie dans le système du centre de masse. Plus précisément, dans cette voie :

$$s = 4 (1+k^2)$$

$$t = -2k^2 (1-\cos\theta) \quad (\text{II.2})$$

$$u = -2k^2 (1+\cos\theta) .$$

La voie u désigne la diffusion  $A+\bar{B} \rightarrow A+\bar{B}$ , et c'est u qui est alors égal au carré de l'énergie dans le centre de masse. De même, la voie t désigne la diffusion  $A+\bar{A} \rightarrow B+\bar{B}$ , le carré de l'énergie dans le centre de masse étant égal à t. Dans tous les cas, les variables s, t et u sont liées par la relation :

$$s + t + u = 4 . \quad (\text{II.3})$$



Bien que linéairement dépendantes, elles seront autant que possible traitées de façon complètement symétrique.

En effet, la considération simultanée de ces trois voies est motivée par un résultat de J. Bros, H. Epstein et V. Glaser<sup>(22)</sup>, selon lequel les trois amplitudes décrivant ces trois diffusions sont données par les valeurs au bord d'une même fonction analytique, lorsque les variables  $s, t$  et  $u$  prennent des valeurs telles que l'une ou l'autre de ces trois réactions devienne physiquement possible. Pour la voie  $s$  par exemple, la région physique est évidemment définie par

$$\begin{cases} k > 0 \\ -1 \leq \cos\theta \leq 1 \end{cases}, \text{ autrement dit par}$$

$$\begin{cases} s > 4 \\ t \leq 0, \quad u \leq 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier de la diffusion  $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$  que nous considérons dans les chapitres suivants, les trois voies désignent le même processus physique. Par conséquent, l'amplitude  $T(\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$  pourra s'obtenir selon :

$$T(\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \{F(s+i\varepsilon, t, u)\} \quad \begin{matrix} s > 4 \\ t, u \leq 0, \end{matrix}$$

où  $F(s, t, u)$  désigne une fonction complètement symétrique et analytique dans un domaine que nous allons préciser. Remarquons au passage que ceci définit l'amplitude en tant que distribution. Nous la considérons cependant comme une fonction. En fait, certains résultats pourraient être démontrés dans un cadre plus général, au moyen par exemple d'amplitudes régularisées par des fonctions de poids convenablement choisies<sup>(23)</sup>.

En ce qui concerne la diffusion pion-pion dans son ensemble, où  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  et  $\pi^0$  forment un triplet de spin isotopique,



$\pi^+$  et  $\pi^-$  étant mutuellement conjugués,  $\pi^0$  étant sa propre anti-particule, l'invariance par isospin et la symétrie de croisement se traduisent par :

$$F^I(s,t,u) = \sum_{J=0}^2 C_J^I F^J(u,t,s) \quad (\text{II.4})$$

Dans cette expression  $\{C_J^I\}$  est la matrice de croisement, de coefficients  $C_J^I$ , donnée par :

$$C_J^I = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

et  $F^I(x,y,z)$  désigne l'amplitude d'isospin I dans la voie où le carré de l'énergie est égal à x et celui du transfert à y. Enfin, la statistique de Bose-Einstein implique :

$$F^I(s,t,u) = (-1)^I F^I(s,u,t) . \quad (\text{II.6})$$

Ces trois amplitudes possèdent les propriétés d'analyticité et de positivité que nous allons maintenant aborder. Il en est de même pour toute combinaison linéaire à coefficients positifs, et en particulier pour la combinaison neutre

$\frac{1}{3} F^0(s,t,u) + \frac{2}{3} F^2(s,t,u)$ . C'est cette amplitude que nous considérerons dans les prochains chapitres, aussi, pour simplifier, énoncerons nous directement ces résultats dans ce cas particulier.



## II - Revue des premiers résultats importants concernant l'analyticité de l'amplitude.

Considérons donc la diffusion  $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$  et désignons par  $F(s,t,u)$ ,  $F(s,t)$  ou encore  $F(s,\cos\theta)$  selon le choix des variables, l'amplitude associée à cette réaction. Cette amplitude est normalisée de telle sorte que la section efficace différentielle est donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{s} |F(s,t)|^2$$

alors que le théorème optique s'écrit :

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{k\sqrt{s}} \operatorname{Im} F(s, t=0)$$

(Ceci est important surtout pour les chapitres III et IV où les bornes sont absolues).

### A - Relations de dispersion.

A la suite des travaux de Goldberger déjà cités, les premiers résultats concernant le domaine d'analyticité en  $s$  qui ont été déduits de la théorie des champs, principalement par K. Symanzik<sup>(24)</sup> et N.N. Bogoliubov<sup>(25)</sup>, peuvent se résumer de la façon suivante :

Pour des valeurs de  $t$  fixées dans l'intervalle  $[0, -T_M]$  ( $T_M > 0$ )

i)  $F(s,t)$  est analytique en  $s$  dans le plan coupé de  $-\infty$  à  $-t$  et de  $4$  à  $+\infty$ .



ii)  $F(s,t)$  est réelle en ce sens que  $F^*(s^*,t)=F(s,t)$ ; ce qui est une conséquence de l'invariance par CPT de la théorie locale des champs.

iii)  $F(s,t)$  est bornée polynomialement en  $s$ , c'est-à-dire que  $|F(s,t)| < C|s|^{N-1}$ . (C'est l'hypothèse usuelle de distribution tempérée, pouvant être déduite de la théorie des observables locales<sup>(26)</sup>, des champs de Jaffe<sup>(27)</sup> ou des axiomes de Wightman<sup>(27)</sup>).

En utilisant ces trois propriétés on peut alors écrire une relation de dispersion en  $s$  en fonction des parties absorptives  $A_s(s,t)$  et  $A_u(s,t)$ , définies par :

$$s > 4, A_s(s,t) = A_s(s+i\varepsilon, t) = \frac{1}{2i} \left\{ F(s+i\varepsilon, t, u) - F(s-i\varepsilon, t, u) \right\} \quad (\text{II.7})$$

$$u > 4, A_u(u,t) = A_u(u+i\varepsilon, t) = \frac{1}{2i} \left\{ F(s, t, u+i\varepsilon) - F(s, t, u-i\varepsilon) \right\}$$

En effet, le théorème de Cauchy étant appliqué au contour constitué par la frontière d'analyticité définie par i) fournit :

$$F(s,t,u) = \sum_0^{N-1} C_p(t) s^p + \frac{s^N}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{A_s(s',t)}{s'^N(s'-s)} + \frac{u^N}{\pi} \int_4^\infty du' \frac{A_u(u',t)}{u'^N(u'-u)}$$

### B - Les ellipses de H. Lehmann.

Un résultat concernant l'analyticité dans l'autre variable est celui de H. Lehmann<sup>(6)</sup> :

Pour  $s$  fixé sur la région physique, c'est-à-dire pour  $s > 4$  :



i) L'amplitude  $F(s, \cos\theta)$  est analytique pour les valeurs de  $\cos\theta$  situées dans une ellipse  $E_1$ , de foyers  $-1$  et  $1$ , de demi-grand axe  $b(s)$ , où :

$$b(s) = \left[ 1 + \frac{(1-M_1^2)(1-M_2^2)}{k^2(s - \{M_1 - M_2\}^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$M_1$  et  $M_2$  désignant les masses des états de masse minimum  $A_1$  et  $A_2$  tels que  $\langle 0 | j_A | A_1 \rangle \neq 0$ ,  $\langle 0 | j_B | A_2 \rangle \neq 0$  où  $j_A$  et  $j_B$  sont les opérateurs de courant associés aux particules entrantes A et B. Dans le cas de la diffusion pion-pion  $M_1 = M_2 = 3$ .

ii) La partie imaginaire  $A(s, \cos\theta)$  de l'amplitude est analytique en  $\cos\theta$  dans une ellipse homofocale  $E_2$ , mais plus grande, puisque son demi-grand axe est donné par  $2b^2(s) - 1$ .

Ces résultats permettent en particulier de développer  $F(s, \cos\theta)$  et  $A(s, \cos\theta)$  sur les polynômes de Legendre :

$$F(s, \cos\theta) = \sum_{\ell} (2\ell+1) f_{\ell}(s) P_{\ell}(\cos\theta) ; s \geq 4, \cos\theta \in E_1 \quad (\text{II.8})$$

$$A(s, \cos\theta) = \sum_{\ell} (2\ell+1) \text{Im} f_{\ell}(s) P_{\ell}(\cos\theta) ; s \geq 4, \cos\theta \in E_2 \quad (\text{II.9})$$

Les sommations sur  $\ell$  étant effectuées sur les entiers pairs de 0 à  $+\infty$  à cause de la symétrie  $t \leftrightarrow u$ .

Les polynômes de Legendre vérifiant les relations d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(z) P_m(z) dz = \frac{2 \delta_{\ell m}}{(2\ell+1)} \quad (\text{II.10})$$



les ondes partielles  $f_\ell(s)$  s'expriment en fonction de l'amplitude selon :

$$f_\ell(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(s, \cos \theta) P_\ell(\cos \theta) d(\cos \theta) = \int_0^1 F(s, \cos \theta) P_\ell(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

c'est-à-dire, en revenant à la variable  $t$ , par :

$$f_\ell(s) = \frac{2}{4-s} \int_0^{\frac{4-s}{2}} F(s, t) P_\ell\left(1 + \frac{2t}{s-4}\right) dt \quad (\text{II.11})$$

ou bien, en définissant  $\lambda$  par  $\cos \theta = 1 - \lambda$ :

$$f_\ell(s) = \int_0^1 F\left(s, t = \frac{4-s}{2}(1-\lambda)\right) P_\ell(1-\lambda) d\lambda \quad (\text{II.12})$$

De plus, les domaines naturels de convergence des développements (II.8) et (II.9) sont des ellipses au moins égales aux ellipses  $E_1$  et  $E_2$ .

Lorsque  $s$  tend vers l'infini, ces dernières se réduisent d'ailleurs au segment  $[-1, 1]$ . Dans le plan de la variable  $t$ , l'extrémité du grand axe étant donnée par  $t_0(s) = \frac{C}{s}$  lorsque  $s \rightarrow \infty$ , la convergence du développement (II.9) dans  $E_2$  implique :

$$\overline{\lim}_\ell | \text{Im} f_\ell(s) |^{\frac{1}{\ell}} \leq \frac{1}{1 + \frac{C}{s}} \sim e^{-\frac{C}{s}}$$

Par conséquent, si ce domaine ne peut être étendu,  $\text{Im} f_\ell(s) \sim e^{-\frac{C}{s}}$ , ce qui signifie que  $L_0 \sim s$ ,  $L_0$  désignant le plus grand moment



angulaire contribuant à la diffusion vers l'avant. Ce résultat ne semble donc pas s'accorder avec l'idée générale que la portée des forces  $R$  est indépendante de l'énergie, puisque dans ce cas un argument semi-classique bien connu fournit  $L_0 \sim R\sqrt{s}$ .

L'agrandissement de ces ellipses à une dimension satisfaisante de ce point de vue a été le progrès essentiel réalisé par A. Martin<sup>(7)</sup> en utilisant la positivité déduite de l'unitarité, que nous allons rappeler.

### III - Unitarité et Positivité.

L'unitarité s'exprime simplement sur les ondes partielles par :

$$0 \leq \rho(s) \left| f_\ell(s) \right|^2 \leq \text{Im} f_\ell(s) \leq 1, \quad \text{pour } s \geq 4, \quad (\text{II.13})$$

où  $\rho(s) = \sqrt{\frac{s-4}{s}}$ . L'égalité d'unitarité élastique :  $\text{Im} f_\ell(s) = \rho(s) \left| f_\ell(s) \right|^2$  a lieu pour  $4 \leq s \leq 16$  (II.14) et est équivalente à la paramétrisation :

$$f_\ell(s) = \frac{1}{\rho(s)} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell, \text{ où } \delta_\ell(s) \text{ est le déphasage réel.}$$

En introduisant les fonctions  $S_\ell(k)$  par :

$$S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell} = 1 + 2i\rho(s)f_\ell(s), \quad (\text{II.15})$$

l'unitarité s'exprime par :

$$\left| S_\ell(k) \right| \leq 1, \quad \text{l'égalité ayant lieu pour } 4 \leq s \leq 16.$$



Bien que la positivité de la partie absorptive soit plus directement reliée à la notion de fonction de type positif sur un groupe<sup>(29)</sup>, nous remarquerons simplement que l'inégalité (II.13) jointe au développement (II.9) entraîne que :

$$A(s,t) > 0 \quad \text{pour } s \geq 4, \quad t > 0 \quad (\text{II.16})$$

De même, la propriété suivante des polynômes de Legendre

$$\left| \frac{d^m}{dz^m} P_e(z) \right|_{-1 \leq z \leq 1} \leq \left| \frac{d^m}{dz^m} P_e(z) \right|_{z=1} \quad \text{entraîne}$$

$$0 < \left| \frac{d^m}{dz^m} A(s,z) \right|_{-1 \leq z \leq 1} \leq \left| \frac{d^m}{dz^m} A(s,z) \right|_{z=1} \quad (\text{II.17})$$

#### IV - Théorème d'Analyticité de A. Martin.

D'après un résultat de J. Bros, H. Epstein et V. Glaser<sup>(30)</sup> déduit de la théorie axiomatique des champs,  $F(s,t)$  est, pour  $t \leq 0$ , analytique en  $s$  dans le plan coupé et de plus tout couple  $(s,t)$  est le centre d'un voisinage d'analyticité en  $s$  et  $t$ . En combinant la positivité à cette analyticité initiale, A. Martin put aboutir au résultat suivant :

i)  $F(s,t,u)$  est pour  $|t| \leq 4$  analytique en  $s$  dans le plan coupé.

ii) Les développements (II.8) et (II.9) initialement convergents dans  $E_1$  et  $E_2$ , convergent uniformément dans des ellipses  $E'_1$  et  $E'_2$  qui dans le plan  $t$  contiennent le disque  $|t| < 4$ . Par conséquent, puisque  $A(s,t) = \sum a_n t^n$  pour  $s \geq 4$ ,  $|t| < 4$ , avec  $a_n > 0$ , nous obtenons les deux inégalités :



$$A(s,t) > 0 \quad \text{pour } s \geq 4, \quad t > 0 \quad (\text{II.18})$$

$$0 < |A(s,t)| \leq A(s,|t|) \quad \text{pour } s \geq 4, \quad |t| < 4, \quad (\text{II.19})$$

qui sont la clef de la plupart des résultats que nous utiliserons ou obtiendrons.

iii) En utilisant la convergence du développement (II.9) dans  $E'_1$  pour  $z > 1$  et la croissance de  $P_\ell(z)$  exponentielle en  $\ell$ , il est possible de retrouver la borne de Froissart<sup>(31)</sup> initialement démontrée dans le cadre de la représentation de Mandelstam.

$$|F(s,t)| < s \text{Log}^2 \left\{ \frac{s}{s_0} \right\}$$

#### V - Relation de dispersion pour l'amplitude $F(s,t,u)$ .

En utilisant les résultats du paragraphe précédent - et la non existence d'états liés dans le système pion-pion qui se traduirait par l'apparition de pôles - on peut écrire pour  $F(s,t,u)$  la relation de dispersion suivante :

$$F(s,t,u) = C(t) + \frac{s^2}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{A(s',t)}{s'^2(s'-s)} + \frac{u^2}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{A(s',t)}{s'^2(s'-u)} \quad (\text{II.20})$$

qui exprime clairement la symétrie  $s \leftrightarrow u$ , où

$$C(t) = F(0,t) + \frac{(4-t)^2}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{A(s',t)}{s'^2(4-s'-t)}$$



et qui provient de l'application du théorème de Cauchy à :

$$G(s,t,u) = \frac{1}{u s} \{ F(s,t,u) - F(0,t,4-t) \}$$

Cette expression, jointe aux inégalités (II.18) et (II.19), est à la base des résultats obtenus dans les chapitres suivants.



### CHAPITRE III

Limite inférieure de la variation des déphasages avec l'énergie.

#### I - Introduction.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser les propriétés de l'amplitude que nous venons de rappeler — relation de dispersion, symétrie et unitarité — pour retrouver les bornes de Wigner dans le cadre de la théorie axiomatique des champs.

Comme nous l'avons déjà signalé, l'interprétation causale classique de Wigner-Eisenbud<sup>(4)</sup> permet de relier très simplement l'existence de telles limitations à la notion de forces à portée finie. En effet, dans ce schéma, l'onde diffusée de moment angulaire  $\ell$  subit un retard  $\frac{d\delta_\ell}{dk}$  proportionnel à la dérivée du déphasage par rapport à l'énergie. Autrement dit, cette onde peut être située au point  $r - 2\frac{d\delta_\ell}{dk}$  lorsque la partie incidente est située au point  $r$ . Si l'interaction est toute entière contenue dans une sphère de rayon  $R$ , il suffit d'imposer à l'onde diffusée de ne pouvoir quitter ce centre diffuseur avant que l'onde incidente ne l'ait atteint pour obtenir l'inégalité bien connue  $\frac{d\delta_\ell}{dk}(k) \geq -R$ . Dans un modèle quantique, cette borne n'est pas fondamentalement affectée, puisque, comme l'a montré Wigner<sup>(4)</sup> :

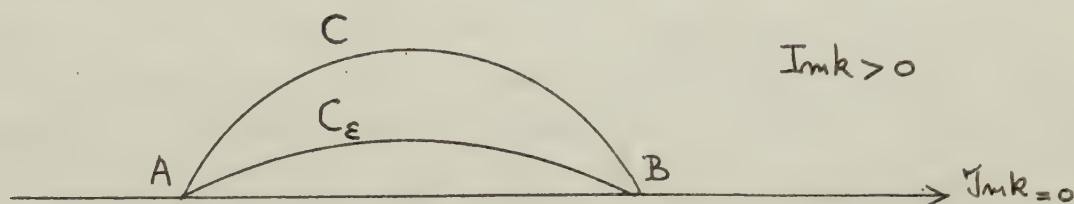
$$\frac{d\delta_\ell(k)}{dk} \geq -R + \varphi_\ell(R, k)$$

où  $\varphi_\ell(R, k)$  est connue ; par exemple pour l'onde  $s$ ,



$\Psi_0(R, k) = \frac{1}{2k} \sin 2(\delta_0 + kR)$ . On peut donc remarquer que cette limite devient triviale pour  $k=0$  et ne permet pas de borner la longueur de diffusion  $a_{00}$ , puisque  $\delta_0(k) = a_{00}k + O(k^2)$  entraîne  $\Psi_0(R, 0) = a_{00} + R$ . Par contre, les limitations que nous obtenons — valables pour des valeurs de l'énergie dans le centre de masse inférieures à 480 MeV. environ — sont absolues (le seul paramètre étant la masse du pion) et permettent de borner effectivement la longueur de diffusion.

Notre démonstration peut être introduite de la façon suivante<sup>(8.)</sup>



Considérons (figure ci-dessus) un arc de cercle  $C$  appartenant au domaine d'analyticité de  $S_\ell(k)$ , sur lequel nous avons pu établir une majoration du type  $|S_\ell(k)| \leq M_\ell$ . En utilisant l'unitarité élastique  $|S_\ell(k)| = 1$  valable sur  $AB$ , on peut établir sur  $C_\epsilon$  — à l'aide du théorème des trois cercles de Hadamard par exemple — une majoration du type :

$$|S_\ell(x+iy)| \leq e^{2y \log M_\ell}$$

avec  $k = x+iy$  ;  $y \geq 0$

Alors un simple passage à la limite, lorsque  $y$  tend vers zéro, fournit pour le premier membre :

$$|S_\ell(x+iy)| \simeq \left| S_\ell(x) + iy \frac{\partial S_\ell(x)}{\partial x} \right| \simeq |S_\ell(x)| \left| 1 - 2y \frac{\partial \delta_\ell}{\partial x}(x) \right| \simeq 1 - 2y \frac{d\delta_\ell}{dk}(x)$$



et pour le second :  $e^{2\gamma \text{Log } M_e} \simeq 1 + 2\gamma \text{Log } M_e$

par conséquent :  $\frac{d\delta_e(k)}{dk} \geq -\text{Log } M_e$

La clef du problème est donc la majoration de  $|S_\ell(k)|$ , l'utilisation de cette majoration pouvant être réalisée par un emploi de l'analyticité de  $S_\ell(k)$  plus raffiné que dans l'exemple précédent. Ce chapitre comporte donc deux étapes.

Dans un premier temps, nous obtenons une borne supérieure de  $|S_\ell(k)|$ , pour  $k$  complexe, à partir d'une majoration de  $|F(s,t)|$  pour des valeurs de  $s$  et  $t$  complexes. Notre point de départ, comme nous allons le voir, est fourni par les bornes absolues de l'amplitude de L. Lukaszuk et A. Martin<sup>(9)</sup> dans le triangle  $\Delta = \{s < 4, t < 4, u < 4\}$ .

Dans un second temps, nous déduisons explicitement l'expression de la limite inférieure de  $\frac{d\delta_\ell}{dk}$  qui peut être obtenue à partir de la limite supérieure de  $|S_\ell(k)|$ . En ce sens, il semble que le meilleur usage de l'analyticité soit fourni par le théorème de Poisson pour un demi-cercle, ce qui nous amène à effectuer une transformation conforme.



## II - Bornes absolues de l'amplitude sur le triangle $\Delta$ .

Ce résultat constitue le point de départ essentiel de ce chapitre. Comme nous l'avons indiqué, il est dû à L. Lukaszuk et A. Martin. Nous donnons ici, en trois points, un bref survol de leur méthode.

### 1 - Minoration de $F(s_2, t, u_2) - F(s_1, t, u_1)$ .

Dans la relation de dispersion (II.20), le terme  $C(t)$  peut être éliminé en considérant la différence des valeurs de l'amplitude en deux points correspondant au même choix de  $t$  ( $0 \leq t < 4$ ). Cette différence s'écrit :

$$F_2 - F_1 = F(s_2, t, u_2) - F(s_1, t, u_1) = \int_4^\infty \rho(s') A(s'; t) ds'$$

$$\rho(s') = \frac{(s_2 - s_1)(s_2 - u_1)(2s' + t - 4)}{\pi(s' - s_1)(s' - u_1)(s' - s_2)(s' - u_2)} \quad (\text{III.1})$$

Dans ce qui suit,  $u_2$  est choisi négatif et  $u_1$  nul, de telle sorte que  $\rho_0(s') > 0$ , donc, compte tenu de (II.18),  $F_2 - F_1 > 0$ . D'autre part, en utilisant l'inégalité (II.13) dans le développement (II.9) lorsque  $0 \leq t < 4$ , on peut obtenir la minoration :

$$A(s'; t) \geq \rho(s') \sum_0^\infty (2\ell + 1) \left| \int_e^\infty \rho(s) \right|^2 P_\ell \left( 1 + \frac{2t}{s' - 4} \right) > 0 \quad (\text{III.2})$$

Alors l'inégalité de Schwarz appliquée au développement (II.8) fournit :



$$|F(s', \cos \theta)|^2 \leq \rho(s') A(s', t) \sum_0^{\infty} (2\ell+1) \frac{P_{\ell}^2(\cos \theta)}{P_{\ell}\left(1 + \frac{2t}{s'-4}\right)} \quad (\text{III.3})$$

où la série majorante est convergente pour  $0 \leq t < 4$ ,  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ . Cette inégalité, reportée dans (III.1) se traduit par :

$$0 > F_2 - F_1 \geq \int_4^{\infty} W_1(s') |F(s', 0)|^2 ds' \quad (\text{III.4})$$

ce qui correspond au choix  $\cos \theta = 1$  dans (III.3). On peut obtenir une inégalité semblable faisant intervenir  $|F(s', u_2)|^2$  avec le choix  $\cos \theta = 1 + \frac{2u_2}{s'-4}$ . Mais (III.3) n'étant valable que pour  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , ne peut être utilisée que si  $s' \geq 4 - u_2$ . Cependant, pour  $4 \leq s' \leq 4 - u_2$ ,  $A(s', u_2)$  est positif, par conséquent :

$$0 > F_2 - F_1 \geq \int_{4-u_2}^{\infty} W_2(s') |F(s', u_2)|^2 ds' \quad (\text{III.5})$$

où, dans (III.4) et (III.5) les poids  $W_1$  et  $W_2$  sont positifs et explicitement connus. Par exemple :

$$W_1(s', t) = \left[ \frac{\rho(s')}{\rho_0(s')} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) \frac{1}{P_{\ell}\left\{1 + \frac{2t}{s'-4}\right\}} \right]^{-1}$$

## 2 - Minoration des intégrales (III.4) et (III.5).

Pour cela on peut utiliser le résultat suivant<sup>(32)</sup> :



si  $F(x)$  est une fonction analytique réelle dans le plan coupé pour  $x \geq 4$ , telle que l'intégrale  $I(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{4+\omega^2}^{\infty} |F(x)|^2 g(x) dx$  existe, l'intégrand étant positif pour  $x \geq 4$  ainsi que  $\text{Im} F(x)$  pour  $4 \leq x \leq 4+\omega^2$ , alors, pour tout  $s_0 < 4$  :

$$I(\omega) > C(\omega, s_0, g) |F(s_0)|^2$$

où  $C(\omega, s_0, g)$  est une fonctionnelle positive connue de  $g$ .

Démonstration :

$$\text{La transformation } Z = -\frac{t-i}{t+i}, \quad t = \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-4-\omega^2}{4-s_0+\omega^2}}$$

applique le plan coupé  $x$  sur le disque unité du plan  $Z$ , coupé de  $Z_\omega$  à 1, où  $Z_\omega = \frac{(\omega - \sqrt{4-s_0+\omega^2})^2}{4-s_0}$  ( $0 < Z_\omega \leq 1$ ), cette coupure correspondant à la portion de coupure  $4 \leq x \leq 4+\omega^2$ . Alors :

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\tilde{F}(e^{i\theta})|^2 \tilde{g}(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |\tilde{F}(e^{i\theta})|^2 \tilde{g}(e^{i\theta}) d\theta$$

où  $\tilde{F}(Z) = F(x)$ , en particulier  $\tilde{F}(0) = F(s_0)$  et

$$\tilde{g}(z) = (4-s_0+\omega^2) |t| (1+t^2) g(x)$$

de telle sorte que  $\tilde{g}(e^{i\theta}) > 0$ . Un théorème de la moyenne fournit  $I(\omega) \geq I_1 I_2$  avec :

$$I_1 = \exp \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \text{Log} \{ \tilde{g}(e^{i\theta}) \} d\theta \right]$$



$$I_2 = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log} |\tilde{F}(e^{i\theta})| d\theta \right]$$

$I_2$  peut être encore minoré par le théorème de Jensen

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} |\tilde{F}(0)| - \sum_j \operatorname{Log} z_j &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log} |\tilde{F}(e^{i\theta})| d\theta &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{Z_w}^1 \operatorname{Log} \{ F^+ - F^- \} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

où  $z_j = r_j e^{i\theta_j}$  désignent les zéros éventuels de  $\tilde{F}(Z)$  dans le disque  $|Z| < 1$ .  $\tilde{F}(Z)$  étant réelle,  $\operatorname{Log} \{ F^+ - F^- \} = 2i \phi(Z)$

où  $\phi(Z)$  est la phase définie par  $\tilde{F}^+(Z) = \tilde{F}(Z+i\varepsilon) = |\tilde{F}(Z)| e^{i\phi(Z)}$

Or, pour  $Z_w \leq Z \leq 1$ ,  $4 \leq x \leq 4+\omega$  notre hypothèse est

$\operatorname{Im} \tilde{F}^+(Z) > 0$ , donc  $0 \leq \phi(Z) \leq \pi$ . Par conséquent :

$$\operatorname{Log} I_2 \geq 2 \operatorname{Log} |\tilde{F}(0)| - \operatorname{Log} Z_w$$

et enfin  $I(\omega) \geq C(s_0, \omega, g) |F(s_0)|^2$

avec 
$$C(s_0, \omega, g) = \frac{1}{Z_w} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Log} \{ \tilde{g}(e^{i\theta}) \} d\theta \right]$$

### 3 - Majoration de l'amplitude ; Résultats numériques.

Les intégrales (III.4) et (III.5) peuvent être bornées selon les méthodes précédentes, comprenant successivement les valeurs 0 et  $\sqrt{-u_2}$ , s. les valeurs  $s_1$  et  $s_2$ . Alors, on connaît deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$F_2 - F_1 \geq I(0) \geq C_1 |F(s_1, 0)|^2$$



$$F_2 - F_1 \geq I(\sqrt{u_2}) \geq c_2 |F(s_2, u_2)|^2$$

soit, en tenant compte de la symétrie  $u \leftrightarrow t$  :

$$F_2 - F_1 \geq c_1 |F_1|^2$$

$$F_2 - F_1 \geq c_2 |F_2|^2$$

ce qui fournit les bornes absolues

$$|F_1| \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_2}} \right\}$$

$$|F_2| \leq \frac{1}{\sqrt{c_2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_2}} \right\}$$

Les meilleurs résultats numériques obtenus — par une méthode légèrement différente — que nous utiliserons dans ce chapitre sont :

$$|F(2,2,0)| \leq 18.5$$

$$|F(3,2,-1)| \leq 75 \quad (\text{III.6})$$

$$-50 \leq F\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \leq 8$$

Ils permettent en outre d'obtenir la borne  $F(4,0,0) \geq -19$  (que nous améliorerions).



### III - Borne supérieure de $S_\ell(k)$ .

D'après les expressions (II.15) et (II.12),  $S_\ell(k)$  est relié à l'amplitude totale par :

$$S_\ell(k) = 1 + 2i g(s) \int_0^1 F(s, t = \frac{(4-s)}{2} \lambda) P_\ell(1-\lambda) d\lambda$$

Nous utiliserons donc la majoration  $|S_\ell(k)| < M_\ell(k)$  avec :

$$M_\ell(k) = 1 + 2 |g(s)| \int_0^1 \tilde{F}(s, t = \frac{(4-s)}{2} \lambda) |P_\ell(1-\lambda)| d\lambda \quad (\text{III.7})$$

où  $\tilde{F}(s, t)$  est une majorante de  $|F(s, t)|$ .

Dans l'intégration (III.7),  $t$  décrit le segment d'extrémités 0 et  $\frac{4-s}{2}$ . La relation de dispersion (II.20) n'étant utilisable que pour  $|t| < 4$  impose donc que  $s$  soit contenu dans le disque  $|s-4| < 8$ . Ce disque est contenu dans le domaine d'analyticité des ondes partielles qui est sensiblement plus étendu<sup>(33)</sup> et coupé pour  $s \leq 0$  et  $s \geq 4$  comme on peut le constater par projection des singularités de l'amplitude totale. En conclusion, la donnée de  $M_\ell(k)$  sur ce disque coupé peut être ramenée à celle de  $\tilde{F}(s, t)$  pour  $s$  et  $t$  complexes,  $|s-4| < 8$ ,  $|t| < 4$ , que nous allons calculer.

L'élimination de  $C(t)$  dans (II.20) peut être réalisée en utilisant la symétrie  $s \leftrightarrow t$  sous la forme :

$$F(s, t) = F(s, t) - F(s_0, t) + F(t, s_0) - F(t_0, s_0) + F(s_0, t_0) \quad (\text{III.8})$$



qui fournit immédiatement une majoration commode avec :

$$|F(s,t)| \leq |F(s,t) - F(s_0,t)| + |F(t,s_0) - F(t_0,s_0)| + |F(s_0,t_0)| \quad (\text{III.9})$$

En fait, dans ce qui suit nous choisirons  $s_0 = t_0 = 2$  pour pouvoir utiliser un des meilleurs résultats du paragraphe précédent, puis-que, d'après (III.6),  $|F(2,2)| \leq 18.5$ . Les deux autres termes de la majoration (III.9) sont des intégrales de la partie absorptive, puisqu'en appliquant (III.1) on peut vérifier que :

$$F(t,2) - F(2,2) = \int_4^\infty \rho_1(s',t) A(s',2) ds'$$

$$\rho_1(s',t) = \frac{2t(t-2)(s'-1)}{\pi s'(s'-2)(s'-t)(s'-2+t)} \quad (\text{III.10})$$

et

$$F(s,t) - F(2,t) = \int_4^\infty \rho_2(s',s,t) A(s',t) ds'$$

$$\rho_2(s',s,t) = \frac{(s-2)(s-2+t)(2s'+t-4)}{\pi (s'-2)(s'-2+t)(s'-s)(s'-4+s+t)} \quad (\text{III.11})$$

Nous sommes alors ramenés au problème plus simple de majorer les modules des intégrales (III.10) et (III.11).



1 - Majoration du terme  $|F(t,2) - F(2,2)|$ .

Cette intégrale peut être majorée par comparaison avec la différence  $F(3,2) - F(2,2)$ , qui est positive, puisque d'après (III.1),

$$F(3,2) - F(2,2) = \int_4^{\infty} \rho_3(s') A(s',2) ds'$$

où  $\rho_3(s') = \frac{6(s'-1)}{\pi s'(s'-3)(s'+1)(s'-2)}$  est positif ainsi que  $A(s',2)$ .

D'autre part, d'après (III.6),  $F(3,2) - F(2,2) \leq 93.5$ , donc

$$0 < \int_4^{\infty} \rho_3(s') A(s',2) ds' < 93.5 \quad (\text{III.12})$$

Comme  $|F(t,2) - F(2,2)| \leq \int_4^{\infty} |\rho_1(s',t)| A(s',2) ds'$

en utilisant la positivité des fonctions de poids et des parties absorptives, on peut écrire :

$$\int_4^{\infty} |\rho_1(s',t)| A(s',2) ds' \leq \sup_{s' \geq 4} \left\{ \frac{|\rho_1(s',t)|}{\rho_3(s')} \right\} \int_4^{\infty} \rho_3(s') A(s',2) ds'$$

c'est-à-dire la majoration cherchée

$$|F(t,2) - F(2,2)| \leq 93.5 \tilde{\zeta}_1(t) \quad (\text{III.13})$$



où 
$$\tilde{\rho}_1(t) = \sup_{s' \geq 4} \left\{ \frac{|\rho_1(s', t)|}{\rho_3(s')} \right\} \quad (\text{Ce rapport reste toujours fini et positif}).$$

2 - Majoration du terme  $|F(s, t) - F(2, t)|$ .

Cette intégrale, qui fait intervenir des valeurs complexes et variables de  $t$  dans la partie absorptive, est d'une majoration un peu plus délicate. Nous la décomposons en deux étapes, selon que  $|t|$  est inférieur ou supérieur à 2.

i)  $0 \leq |t| \leq 2$ .

Il suffit d'utiliser (II.19) sous la forme :

$$|A(s, 2)| \leq A(s, |t|) \leq A(s, 2)$$

Alors 
$$|F(s, t) - F(2, t)| \leq \int_4^\infty |\rho(s', s, t)| A(s', 2) ds'$$

et cette dernière intégrale se majore comme précédemment par comparaison avec (III.12), c'est-à-dire que :

$$|F(s, t) - F(2, t)| \leq 93.5 \tilde{\rho}_2(s, t)$$

où 
$$\tilde{\rho}_2(s, t) = \sup_{s' \geq 4} \left\{ \frac{|\rho_2(s', s, t)|}{\rho_3(s')} \right\} \quad (\text{III.14})$$



$$\text{ii) } 2 \leq |t| < 4.$$

Dans ce cas nous sommes amenés à utiliser quelques propriétés des ondes partielles  $f_\ell(s)$  — qui seront d'ailleurs évoquées de façon plus détaillée au cinquième chapitre — selon une méthode proposée par A.K. Common<sup>(10)</sup>. Plus précisément nous utilisons :

1) L'onde S,  $f_0(s)$ , est monotone croissante pour  $1.7 < s < 4$ , c'est-à-dire que

$$f_0(|t|) > f_0(2) \quad (\text{III.15})$$

2) Pour  $\ell \geq 2$ ,  $0 \leq |t| < 4$ , les ondes partielles admettent la représentation de Froissart-Gribov :

$$f_\ell(|t|) = \frac{4}{\pi(4-|t|)} \int_4^\infty Q_\ell \left\{ \frac{2s'}{4-|t|} - 1 \right\} A(s'|t) ds' \quad (\text{III.16})$$

ce qui implique en particulier, compte tenu de la positivité,

$$0 < f_\ell(|t|) \leq f_2(|t|) \frac{Q_\ell \left\{ \frac{4+|t|}{4-|t|} \right\}}{Q_2 \left\{ \frac{4+|t|}{4-|t|} \right\}} \quad (\text{III.17})$$

Développons  $F(|t|, 3)$  et  $F(|t|, 2)$  sur les polynômes de Legendre. L'onde S s'élimine dans la différence qui s'écrit :

$$F(|t|, 3) - F(|t|, 2) = \quad (\text{III.18})$$

$$\sum_{\ell \geq 2} (2\ell+1) f_\ell(|t|) \left\{ P_\ell \left( \frac{2+|t|}{4-|t|} \right) - P_\ell \left( \frac{|t|}{4-|t|} \right) \right\}$$



En remplaçant dans cette expression  $f_l(|t|)$  par la majoration (III.17) et en utilisant la formule sommatoire de Heine :

$$\sum_{l \geq 2} (2l+1) Q_l(z) \{P_l(z_1) - P_l(z_2)\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z+z_1} - \frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z+z_2} \right\}$$

il vient

$$0 < F(|t|, 3) - F(|t|, 2) \leq f_2(|t|) N_1(|t|)$$

$$\text{où } N_1(|t|) = \frac{(4-|t|)}{2 Q_2 \left\{ \frac{4+|t|}{4-|t|} \right\}} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{6+2|t|} - \frac{1}{4+2|t|} \right\} \quad (\text{III.19})$$

D'autre part :

$$F(|t|, 2) > f_0(|t|) + 5! f_2(|t|) P_2 \left( \frac{|t|}{4-|t|} \right)$$

puisque par (III.16) le reste est une série à termes positifs.  
Donc, en utilisant (III.15) :

$$f_2(|t|) < \frac{F(|t|, 2) - f_0(2)}{5 P_2 \left( \frac{|t|}{4-|t|} \right)} \quad (\text{III.20})$$

Mais la différence  $F(|t|, 2) - f_0(2)$  qui est positive, puisque donnée<sup>(12)</sup> par :

$$F(|t|, 2) - f_0(2) = \frac{1}{\pi} \int_4^\infty A(s', 2) \left[ \frac{1}{s' - |t|} + \frac{1}{s' - 2 + |t|} - \log \left( \frac{s' - 2}{s' - 2} \right) \right] ds'$$



peut être majorée par comparaison avec (III.12). On obtient :

$$F(2, |t|) - f_0(2) \leq N_2(|t|)$$

avec

$$N_2(|t|) = \frac{93.5}{\pi} \sup_{s' \geq 4} \left\{ \frac{1}{p_3(s')} \left[ \frac{1}{s' - |t|} + \frac{1}{s' - 2 + |t|} - \log\left(\frac{s'}{s' - 2}\right) \right] \right\} \quad (\text{III.21})$$

Ce résultat reporté dans (III.20) puis dans (III.19) fournit

$$0 < F(|t|, 3) - F(|t|, 2) < N_3(|t|)$$

$$\text{avec } N_3(|t|) = \frac{N_1(|t|) N_2(|t|)}{5 P_2\left(\frac{|t|}{4 - |t|}\right)} \quad (\text{III.22})$$

Mais par symétrie  $s \rightleftharpoons t$

$$F(|t|, 3) - F(|t|, 2) = F(3, |t|) - F(2, |t|)$$

$$\text{donc } 0 < F(3, |t|) - F(2, |t|) = \int_4^\infty p_4(s', |t|) A(s', |t|) ds' \leq N_3(|t|)$$

$$\text{avec } p_4(s', |t|) = \frac{(1 + |t|)(2s' + |t| - 4)}{\pi (s' - 3)(s' - 2)(s' - 1 + |t|)(s' - 2 + |t|)} \quad (\text{III.23})$$

Maintenant  $|F(s, t) - F(2, t)|$  peut se borner par comparaison avec (III.23). En effet :



$$|F(s,t) - F(z,t)| \leq \int_4^\infty |p_2(s',s,t)| A(s',t) ds'$$

$$\text{soit } |F(s,t) - F(z,t)| \leq \int_4^\infty |p_2(s',s,t)| A(s',t) ds' \leq N_4(s,t)$$

$$\text{avec } N_4(s,t) = N_3(|t|) \sup_{s' \geq 4} \left\{ \frac{|p_2(s',s,t)|}{p_4(s',|t|)} \right\} \quad (\text{III.24})$$

### 3 - Résultats.

En rassemblant les majorations (III.6), (III.13), (III.14) et (III.24) nous obtenons la borne cherchée :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s,t) = & 18.5 + 93.5 \left\{ \tilde{f}_1(t) + \theta(2-|t|) \tilde{f}_2(s,t) \right\} \\ & + \{1 - \theta(2-|t|)\} N_4(s,t) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\text{avec } \theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

qui reportée dans (III.7) fournit  $M_2(k)$ . Nous sommes alors à même d'entamer la deuxième étape de ce calcul.



#### IV - Limite inférieure des dérivées des déphasages.

##### 1 - Transformation conforme.

Le domaine d'analyticité  $D_K$  de  $S_\ell(k)$  est l'image par  $k = \sqrt{\frac{s-4}{4}}$  du disque  $|s-4| < 8$  coupé pour  $s \leq 0$  et  $s \geq 4$ . Ce domaine est représenté sur la figure (1.a). La limite que nous allons obtenir est une conséquence de la sous-harmonicité de  $\text{Log } |S_\ell(k)|$  sur tout demi-disque contenu dans  $D_K$ . Comme nous ne voulons pas nous restreindre à un disque de rayon inférieur à 1 (à cause du point de branchement  $k = i$ ) mais au contraire utiliser  $D_K$  au maximum, nous sommes amenés à utiliser la transformation conforme définie par :

$$u(k) = \frac{\sqrt{(1+k^2)(4+k^2)} + k^2 - 2}{3k}$$

où la détermination choisie est

$$\text{Re} \left[ \sqrt{(1+k^2)(4+k^2)} \right] > 0 \quad \text{pour} \quad \text{Re } k > 0$$

Le domaine  $D_u = u(D_K)$ , image par  $u$  de  $D_K$ , est représenté sur la figure (1.b). C'est le demi-disque unité du plan  $u$  ; l'image de la coupure  $(i, i\sqrt{2})$  est un arc de sa frontière ; les axes réels se correspondent, un point arbitraire  $k_0$  ayant une image  $u_0 = u(k_0)$ , sauf l'origine qui est invariante.



## 2 - Théorème de Carleman.

Nous nous sommes placés volontairement dans les conditions d'application de ce théorème<sup>(34)</sup>, en effet :

Soit  $f(z)$  une fonction analytique dans un domaine  $D_R = \{ \text{Im } z > 0, |z| < R \}$ , telle que  $f(0) = 1$  et de zéros éventuels  $z_j = r_j e^{i\theta_j}$  dans  $D_R$  ; alors

$$\left. \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \frac{df}{dz}(z) \right\} \right|_{z=0} = \sum_{r_j < R} \left\{ \frac{1}{r_j} - \frac{r_j}{R} \right\} \sin \theta_j - I_1 - I_2$$

avec 
$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right\} \text{Log} |f(x)f(-x)| dx$$

et 
$$I_2 = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \text{Log} |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (\text{III.26})$$

## 3 - Application de ce théorème : Bornes des dérivées des déphasages.

Il suffit maintenant — pour appliquer ce théorème — d'amener le point  $u_0$  à l'origine. Nous effectuons donc la deuxième

transformation conforme  $z(u) = \frac{u - u_0}{1 - \bar{u}_0 u}$ . Le domaine  $D_z = z(D_u)$

est représenté sur la figure (1.c). Définissons alors  $f(z)$  par

$$f(z) = \frac{s_\ell[k(z)]}{s_\ell[k_0]} \quad \text{où} \quad k(z) = k[u(z)] \quad \text{et où interviennent les trans-}$$

formations inverses de celles définies précédemment, c'est-à-dire :



$$u = u(z) = \frac{u_0 + z}{1 + u_0 z}$$

et

$$k(u) = \frac{1}{4u} \left\{ \sqrt{9u^4 + 14u^2 + 9} + 3(u^2 - 1) \right\}$$

Appliquons le théorème (III.26) en estimant chacun des termes.

$$f(0) = \frac{S_e[k(0)]}{S_e[k_0]} = 1$$

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = 2i \left. \frac{d\delta_e(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \left. \frac{dk}{dz} \right|_{z=0}$$

avec

$$\left. \frac{dk}{dz} \right|_{z=0} = \frac{2}{3} (4 - k_0^2) \sqrt{\frac{1 + k_0^2}{4 + k_0^2}}$$

donc

$$\frac{1}{2} \Im_m \left\{ \left. \frac{df}{dz}(z) \right|_{z=0} \right\} = \frac{2}{3} (4 - k_0^2) \sqrt{\frac{1 + k_0^2}{4 + k_0^2}} \left. \frac{d\delta_e(k)}{dk} \right|_{k=k_0}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right\} \log \left| \frac{S_e[k(x)] S_e[k(-x)]}{S_e^2(k_0)} \right| dx = 0$$

à cause de l'unitarité élastique sur l'axe réel puisque  $|S_\ell(k)| = 1$ . Enfin,

$$\sum_{r_j \leq R} \left\{ \frac{1}{r_j} - \frac{R_j}{R} \right\} \sin \theta_j \geq 0$$

et

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \log M_\ell[k(Re^{i\theta})] \sin \theta d\theta$$

Par conséquent, (III.26) se traduit par le résultat annoncé :



$$\frac{d\delta_\ell(k_0)}{dk} \gg - \frac{3}{2\pi R(4-k_0^2)} \sqrt{\frac{4+k_0^2}{1+k_0^2}} \int_0^\pi \text{Log}\{M_\ell[k(Re^{i\theta})]\} \sin\theta d\theta \quad (\text{III.27})$$

où  $R < 1$  et  $k_0 < \sqrt{2}$ . (Ceci limite la portée de cette contrainte à des énergies de 480 MeV. environ dans le centre de masse).

Remarquons pour terminer que lorsque  $\theta$  tend vers 0 ou  $\pi$ , la majorante  $M_\ell[k(Re^{i\theta})]$  diverge, ceci étant dû à la divergence de  $\tilde{F}(s,t)$  pour ces valeurs, le terme  $\sup_{s' \geq 4} \{\frac{1}{s'-s}\}$  n'étant plus fini

lorsque  $s = s_0 + i\epsilon$ ,  $s_0 \geq 4$ . Mais cette divergence n'est que logarithmique dans (III.27), et est de plus multipliée par  $\sin\theta$ .



## CHAPITRE IV

Bornes inférieures de la longueur de diffusion de l'onde S.

### I - Introduction.

Nous avons pu remarquer que les bornes de Wigner ne s'appliquaient pas à la longueur de diffusion  $a_{00}$ . Le but de ce chapitre est de montrer qu'au contraire ceci est parfaitement possible dans le cadre de la méthode précédente. En fait, ceci est déjà contenu dans les résultats de L. Lukaszuk et A. Martin<sup>(9)</sup> qui impliquent  $a_{00} > -19$ . En raison de l'importance accordée à cette observable, nous essayons ici d'améliorer ce résultat. Ceci est réalisable dans trois contextes.

Tout d'abord, nous nous limitons aux hypothèses du chapitre précédent et explicitons simplement la borne qu'on peut en obtenir.

Dans un deuxième paragraphe, nous supposons que la longueur de diffusion est négative. Cette hypothèse est naturelle puisque de toute façon dans le cas contraire la borne précédente est triviale. Nous pouvons alors, d'une part améliorer les bornes absolues de l'amplitude et d'autre part utiliser plus efficacement le théorème de Carleman.

Enfin, nous supposons que l'amplitude satisfait à la représentation de Mandelstam avec une fonction spectrale double positive, ce qui est la façon la plus simple d'assurer la positivité. Quelques conséquences de cette hypothèse ont été étudiées en particulier par A. Martin<sup>(12)</sup> et F.J. Yndurain<sup>(13)</sup>. Elle implique



par exemple que la section efficace totale s'annule à l'infini et ailleurs est bornée par  $C/\text{Log}(s)$ , où  $C$  est une constante connue. De ce point de vue, elle n'apparaît pas à priori incompatible avec les résultats expérimentaux actuels<sup>(12)</sup>, bien que difficilement conciliable avec l'existence de la résonance  $f_0$ <sup>(13)</sup>. En fait, avec ces nouvelles hypothèses, nous reprenons l'essentiel de la démonstration du paragraphe précédent, afin que la limite obtenue pour  $a_{00}$  puisse éventuellement contribuer aux déterminations possibles de la fonction spectrale.

## II - Borne inférieure de $a_{00}$ .

Rappelons que la longueur de diffusion est donnée par  $a_{00} = f_0(4) = F(4,0)$ , c'est-à-dire par :

$$a_{00} = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 2\delta_0(k)}{2k} \right\} = \frac{d\delta_0'(0)}{dk}$$

puisque  $\delta_0(0) = n\pi$ .

Il suffit donc de considérer l'inégalité (II.27) pour  $k_0 = u_0 = 0$  et l'on obtient la borne :

$$a_{00} > -\frac{3}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta \text{Log} \{ M_0(k[R e^{i\theta}]) \} d\theta$$

où  $R$  est variable mais strictement inférieur à 1. Le meilleur résultat que l'on puisse obtenir est alors :

$$a_{00} > -4 \quad (\text{IV.1})$$

Il faut d'autre part remarquer que dans ce cas, ce résultat est déduit de l'unitarité au sens large, puisque



$S_0(0)=1$ . En particulier, nous n'utilisons pas la relation  $I_1=0$  — qui est vraie uniquement dans l'approximation de l'unitarité élastique — mais la borne  $I_1 < 0$  qui se déduit de :

$$\begin{aligned} |S_0(k)| &\leq 1 && \text{pour } k > 0 \\ |S_0(0)| &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent (IV.1) s'applique à la combinaison  $\frac{1}{3}(a_0+2a_2)$ , où  $a_0$  et  $a_2$  désignent les longueurs de diffusion des ondes S dans les isospins 0 et 2. Ce résultat est particulièrement frappant, puisque tous les processus du type  $\pi^0\pi^0 \rightarrow AB$  peuvent concurrencer le processus élastique  $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ . Cependant, en l'absence de toute information concernant les processus inélastiques ou la position des zéros de  $S_0(k)$  la borne obtenue ne peut être que négative. Dans le paragraphe suivant, nous supposons donc que la longueur de diffusion est elle-même négative.

### III - Borne inférieure de $a_{00}$ dans l'éventualité où $a_{00} < 0$ .

Avec cette hypothèse, nous pouvons apporter une certaine amélioration dans chacune des étapes de la méthode précédente.

#### 1 - Borne supérieure de l'amplitude.

La borne (IV.1) s'écrit alors  $|F(4,0,0)| \leq 4$  et peut être immédiatement utilisée en écrivant :

$$|F(s,t)| \leq 4 + |F(s,t) - F(0,t)| + |F(t,0) - F(4,0)| \quad (\text{IV.2})$$

Il reste à majorer les intégrales :



$$|F(t,0) - F(4,0)| \leq \int_4^\infty \rho_5(s',t) A(s',0) ds'$$

$$\rho_5(s',t) = \left| \frac{t(t-4)(2s'-4)}{\pi s'(s'-4)(s'-t)(s'-4+t)} \right| \quad (\text{IV.3})$$

et

$$|F(s,t) - F(0,t)| \leq \int_4^\infty \rho_6(s',s,t) |A(s',t)| ds'$$

$$\rho_6(s',s,t) = \left| \frac{s(s-4+t)(2s'+t-4)}{\pi s'(s'-4+t)(s'-s)(s'-4+t+s)} \right| \quad (\text{IV.4})$$

Ceci sera fait par comparaison avec les inégalités suivantes:

$$\text{i)} \quad 0 < \frac{8}{\pi} \int_4^\infty \frac{A(s',0)}{s'(s'-2)(s'-4)} ds' < 18.5 \quad (\text{IV.5})$$

qui exprime que  $0 < F(4,0) - F(2,0) \leq |F(2,0)| \leq 18.5$ , d'après (III.6).

$$\text{ii)} \quad 0 < \int_4^\infty \rho_7(s',|t|) A(s',|t|) ds' \leq 50 \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$\rho_7(s',t) = \frac{(4-t)^2}{\pi s'(s'-4+t)(2s'+t-4)}$$

qui provient de  $0 < F(0,|t|) - F(2-|t|/2, |t|) \leq 50$

puisque  $F(0,|t|) \leq F(0,4) < 0$

et que  $F(2-|t|/2, |t|) \geq F(4/3, 4/3, 4/3) \geq -50$

(  $F(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$  est le minimum absolu de l'amplitude dans  $\Delta$  )<sup>(37)</sup>

iii) En fait, nous n'utiliserons (IV.6) que pour



$2 < |t| < 4$ , car on peut numériquement vérifier que la borne (III.12) est meilleure pour  $0 \leq |t| \leq 2$ . Nous l'associerons alors avec (IV.5) en utilisant l'inégalité :

$$|A(s,t)| \leq A(s,|t|) \leq \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) A(s,0) + \frac{|t|}{2} A(s,2) \quad (\text{IV.7})$$

déduite de la convexité de  $A(s',|t|)$ .

Les méthodes du chapitre précédent s'appliquent encore. On obtient alors les majorations :

$$|F(t,0) - F(4,0)| \leq 4.7 |t(t-4)| \sup_{s' \geq 4} \left[ \left| \frac{(s'-2)^2}{(s'-t)(s'+4+t)} \right| \right] \quad (\text{IV.8})$$

Pour  $0 \leq |t| \leq 2$

$$|F(s,t) - F(0,t)| \leq 46.8 |t| \sup_{s' \geq 4} \left[ \frac{|\rho_6(s',s,t)|}{\rho_3(s')} \right] + 1.2 \pi (2-|t|) \rho_8(s,t)$$

$$\rho_8(s,t) = \sup_{s' \geq 4} \left[ \left| \rho_6(s',s,t) \right| \frac{s'(s'-2)(s'-4)}{s'(s'-2)(s'-4)} \right] \quad (\text{IV.9})$$

et pour  $2 \leq |t| < 4$

$$|F(s,t) - F(0,t)| \leq 50 \sup_{s' \geq 4} \left[ \frac{|\rho_6(s',s,t)|}{\rho_7(s',|t|)} \right] \quad (\text{IV.10})$$

Les inégalités (IV.8-9-10) reportées dans (IV.2) fournissent une majorante  $\tilde{F}(s,t)$ .



## 2 - Borne inférieure de $a_{00}$ .

Désignons par  $\delta(s)$  la phase de  $S_0(k) = S_0(s)$  définie par  $S_0(s+i\epsilon) = |S_0(s)|e^{i\delta(s)}$ ,  $\delta(4) = 0$ . L'hypothèse  $a_{00} < 0$  peut être utilisée à nouveau car :

i) Si  $0 \leq s < 4$ ,  $f_0(s) < a_{00} < 0$  comme nous le verrons au cinquième chapitre. Alors,  $S_0(s) > 1$ , puisque

$$S_0(s) = 1 - 2\sqrt{\frac{4-s}{s}} f_0(s) \quad \text{et donc} \quad \delta(0) = 0.$$

ii) Nous le verrons également,  $\text{Im} f_0(s+i\epsilon) < 0$  pour  $-4 < s < 0$ , donc  $\text{Re } S_0(s+i\epsilon) = 1 - 2\sqrt{\frac{4-s}{-s}} \text{Im} f_0(s+i\epsilon) > 1$  et par continuité :

$$0 \leq \delta(s) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour} \quad 0 \geq s > -4. \quad (\text{IV.11})$$

Considérons alors la fonction  $\phi_R(k)$  définie par :

$$\phi_R(k) = \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_1^R \delta'(x) \left\{ \frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\frac{R^2}{z}} - \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+\frac{R^2}{z}} \right\} dx \right]$$

où  $z = -ik$ ,  $R > 1$ . Son module est 1 sur l'axe réel ainsi que sur tout cercle  $|k| = R$ , elle a une coupure  $(i, iR)$  avec une phase  $-\delta(z)$ , et ailleurs est analytique. Enfin, elle n'a pas de zéros. On peut donc appliquer directement le théorème de Carleman à la fonction  $f(k) = S_0(k)\phi_R(k)$  qui n'a plus la coupure  $(i, iR)$ , et est de même module que  $S_0(k)$  sur le reste du contour. Le membre de droite de (III.26) est donc inchangé. La seule modification est :



$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(k)}{dk} \right\}_{k=0} = a_{00} - \frac{1}{2} \frac{d\phi_R}{dz} \Big|_{k=0}$$

mais 
$$\frac{d\phi_R}{dz}(0) = -\frac{1}{\pi} \int_1^R \delta(x) \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{R^2} \right\} dx$$

qui est minorée, compte tenu de (IV.11), par :

$$\frac{d\phi_R}{dz}(0) > \left( \frac{1}{R^2} - 1 \right) > -\frac{1}{2} \quad (R < \sqrt{2})$$

On obtient donc dans ce cas :

$$a_{00} > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R^2} - 1 \right) - \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \sin \theta \log \{ M_0(R e^{i\theta}) \} d\theta \quad (\text{IV.12})$$

ce qui fournit une légère amélioration du résultat précédent :

$$a_{00} > -3.5. \quad (\text{IV.13})$$

#### IV - Représentation de Mandelstam avec fonction spectrale positive.

Dans cette éventualité, la méthode précédente fournirait  $a_{00} > -(n + \frac{1}{2})$  en faisant tendre  $R$  vers l'infini,  $n$  désignant le nombre de zéros de  $\operatorname{Re} S_0(s)$ , pour  $s < 0$ . Ceci constitue, en fait, un des résultats obtenus par A. Bincer et B. Sakita<sup>(10)</sup>. Notre but est ici d'envisager de ce point de vue l'hypothèse d'une fonction spectrale double  $\rho(x, y)$  positive, cette hypothèse ayant été émise pour satisfaire simplement à la positivité, puisque pour  $\ell \geq 2$ ,  $x \geq 4$ ,

$$\operatorname{Im} f_\ell(x) = \frac{2}{\pi} \int_{\gamma_0(x)}^\infty Q_\ell(y) \rho(x, y) dy \quad (\text{IV.14})$$



où  $y_0(x)$  délimite le support de  $\rho(x,y)$ . En fait :

$$y_0(x) = 1 + \frac{2t_0(x)}{x-4}, \quad t_0(x) = \operatorname{Im} f \left\{ \frac{4x}{x-16}, \frac{16x}{x-4} \right\}$$

La méthode employée est toujours la même.

### 1 - Théorème de Carleman.

$S_0(k)$  est analytique dans tout le demi-plan complexe supérieur privé de la partie de l'axe imaginaire s'étendant de  $i$  à l'infini. La transformation conforme

$$v = \frac{\sqrt{1+k^2} - 1}{k} \quad \text{avec } \operatorname{Re} \sqrt{1+k^2} > 0 \text{ pour } \operatorname{Re} k > 0$$

applique ce domaine sur le demi-disque unité  $D_v$  du plan  $v$ . La coupure s'applique sur le contour  $v = e^{i\phi}$  ( $0 < \phi < \pi$ ) et l'axe réel sur l'intervalle  $] -1, 1[$ , l'origine étant invariante. L'application directe du théorème de Carleman à la fonction  $f(v) = S_0[k(v)]$  sur tout demi-cercle de rayon  $R < 1$  conduit, avec les mêmes arguments, à :

$$a_{00} > -\frac{1}{2\pi R} \int_0^\pi \sin \theta \operatorname{Log} \{ M_0(\operatorname{Re}^{i\theta}) \} d\theta \quad (\text{IV.15})$$

le facteur  $\frac{1}{2}$  provenant de  $\left. \frac{dv}{dk} \right|_{k=0} = \frac{1}{2}$  et où  $M_0(\operatorname{Re}^{i\theta})$  désigne une

majorante de  $|S_0(\operatorname{Re}^{i\theta})|$ . Celle-ci peut se déduire par (III.7) d'une majorante de  $|F(s,t)|$ .

### 2 - Majoration de l'amplitude.

Notre point de départ est encore (III.9), où il faut



cette fois majorer les intégrales (III.10) et (III.11) quel que soit  $t$  complexe. Ceci peut être réalisé grâce à l'unitarité qui entraîne :

$$\frac{2}{\pi} \int_{\gamma_0(s')}^{\infty} Q_2(\gamma) \rho(s', \gamma) d\gamma \leq \frac{1}{\rho(s')} \quad (\text{IV.16})$$

Partant de l'expression<sup>(12)</sup> :

$$A(s', t) = \text{Im} f_0(s') + 5 \text{Im} f_2(s') P_2(z) + \frac{8}{\pi} \int_{\gamma_0(s')}^{\infty} K(\gamma, z) \rho(s', \gamma) d\gamma \quad (\text{IV.17})$$

avec 
$$z = 1 + \frac{2t}{s' - 4}$$

et 
$$K(\gamma, z) = \frac{\gamma Q_3(\gamma) P_4(z) - z P_3(z) Q_4(\gamma)}{\gamma^2 - z^2}$$

Nous pouvons majorer cette intégrale compte tenu de (IV.16) et de la positivité de  $\rho(s', \gamma)$  :

$$\frac{8}{\pi} \left| \int_{\gamma_0(s')}^{\infty} K(\gamma, z) \rho(s', \gamma) d\gamma \right| \leq 4 \frac{R(z)}{\rho(s')}$$

$$R(z) = \sup_{\gamma \gg \gamma_0(s')} \left\{ \frac{|K(\gamma, z)|}{Q_2(\gamma)} \right\}$$

Reportée dans (IV.17) cette borne entraîne la suivante :

$$|A(s', t)| \leq \frac{1}{\rho(s')} \left[ 1 + 5 |P_2(z)| + 4 R(z) \right] \quad (\text{IV.18})$$

qui, pouvant être intégrée dans les expressions (III.10) et (III.11), nous fournit ainsi  $\hat{F}(s, t)$ .

Nous avons alors pu obtenir :

$$a_{00} > -2.0 \quad (\text{IV.19})$$



## V - Conclusion.

Ces résultats mettent donc en évidence une fois de plus la nature limitative des hypothèses utilisées, en dépit de leur grande généralité. Cependant, les valeurs numériques (IV.1) ou (IV.13) peuvent paraître relativement éloignées de la plupart des propositions expérimentales concernant les longueurs de diffusion  $a_0$  et  $a_2$  des ondes S dans les isospins 0 et 2. Les bornes  $a_0 > -7.5$  et  $a_2 > -7.1$  qui ont été démontrées par A.K. Common<sup>(10)</sup> au moyen de l'extension de la méthode du troisième chapitre à chaque isospin pris séparément, n'apportent que peu de progrès dans cette direction. Par contre, un gain très net peut être obtenu par l'union de ces principes généraux à un certain apport phénoménologique, comme le prouve, par exemple, la limite inférieure  $a_0 > -0.5$  proposée par C.J. Goebel et G. Shaw<sup>(35)</sup>. Pour que nos bornes puissent acquérir une valeur discriminatoire à l'égard des résultats expérimentaux actuels, il faudrait donc les diviser par un facteur 10 au moins. En l'absence de nouvelle information concernant les parties absorptives, cet objectif paraît difficilement accessible, bien que des progrès puissent être encore réalisés<sup>(36)</sup>.

Une deuxième approche apparaît donc souhaitable. En effet, l'étude précédente n'utilise pas toute l'information qui a pu être acquise à partir des mêmes hypothèses et qui se traduit, par exemple, par un grand nombre de contraintes agissant sur les ondes partielles. De plus, comme nous l'avons indiqué dans notre introduction l'unitarité élastique peut avoir un rôle essentiel à basse énergie. Ces deux remarques nous conduisent à l'étude directe des ondes partielles, ce qui fait l'objet de la seconde partie.



## CHAPITRE V

### Structure des ondes partielles S et D et étude de leur paramétrisation dans une théorie neutre.

#### I - Introduction.

Dans cette partie, nous abordons l'étude des ondes partielles et des modèles qui peuvent en fournir une représentation sur la région constituée du domaine non physique et de celui des basses énergies. Dans la mesure du possible, ces modèles seront construits à partir des seules contraintes rigoureusement déduites de la théorie axiomatique des champs.

Pour l'instant, nous nous limiterons à l'étude des ondes partielles S et D dans le cas neutre. Ce chapitre est en effet consacré davantage à l'élaboration et à l'analyse de la méthode qu'à son application concrète, qui sera réalisée ultérieurement.

En plus de ces raisons techniques, l'étude approfondie du cas neutre, qui peut paraître assez académique, est en fait motivée par l'existence de deux résultats importants et d'une certaine façon contradictoires, dûs à G. Wanders<sup>(18)</sup> et D. Atkinson<sup>(19)</sup>.

O. Piguet et G. Wanders<sup>(18)</sup>, en imposant à divers modèles d'ondes S unitaires de satisfaire à un ensemble de contraintes, que nous évoquerons ultérieurement, révélèrent le caractère très contraignant de ces dernières : dans leurs paramétrisations, la portée effective est pratiquement fixée par la longueur de diffusion.

Mais à la suite de cette étude apparaissait l'important résultat de D. Atkinson<sup>(19)</sup> selon lequel une très large multi-



plicité d'amplitudes, dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables réelles, peut simultanément satisfaire le croisement et les conditions générales de l'unitarité. Toutes ces amplitudes doivent donc vérifier les contraintes utilisées par Wanders, ce qui peut paraître surprenant compte tenu des résultats de ce dernier.

D'autre part, de nouvelles contraintes qui semblent confirmer le point de vue de Wanders apparaissent progressivement. On sait, par exemple, que la donnée de l'onde S sur la région non physique ne laisse que très peu de latitude aux variations de l'onde D sur ce domaine<sup>(15)</sup>.

Ces impressions, assez qualitatives, méritaient donc d'être analysées de façon plus précise. Il était en particulier capital, pour la validité de toute prédiction concernant les déphasages, de s'assurer que les résultats préliminaires obtenus par Wanders n'étaient pas imputables à une paramétrisation trop particulière.

Nous adopterons dans cette étude le plan suivant. Tout d'abord, dans l'appendice A, nous rappelons les propriétés essentielles des ondes partielles. Une partie de ces propriétés est directement utilisée et traduite dans la paramétrisation des ondes S et D que nous proposerons. Certains paramètres, maintenus libres dans cette construction, sont alors choisis pour que les contraintes restantes soient vérifiées.

## II - Paramétrisation de l'onde S.

Dans ce qui suit, nous désignerons l'onde S par  $f_0(s)$ , sa longueur de diffusion par  $a_0$  et sa valeur à l'origine par  $z_0$ . Nous définissons  $a$  et  $z$  par :



$$a = \frac{1}{a_0}, \quad z = \frac{1}{z_0}.$$

### 1 - Relations de dispersion dans le domaine D.

Pour tenir compte de l'unitarité élastique, nous adopterons la méthode de l'amplitude inverse et, quitte à revenir ultérieurement sur cette hypothèse, nous supposerons que l'onde S n'a pas de zéros dans D. Dans ces conditions, la fonction  $\Psi(s)$ , définie par :

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{f(s)} - \frac{1}{f(0)} \right\} \quad (V.1)$$

est analytique dans D et finie à l'origine, puisque nous avons vu (cf appendice A) que  $\text{Im} f_0(s) \sim s\sqrt{s}$ . On peut alors écrire une relation de dispersion avec une soustraction au point  $s=4$  pour  $\Psi(s)$  le long du contour  $\Gamma$  de la figure (2) :

$$\Psi(s) = \Psi(4) + \frac{(s-4)}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(s') ds'}{(s'-4)(s'-s)} - \frac{s-4}{\pi} \int_4^{16} \frac{g(s') ds'}{s'(s'-4)(s'-s)} \quad (V.2)$$

où nous avons tenu compte de l'unitarité élastique, pour  $4 \leq s' \leq 16$

$$\text{Im} \Psi(s') = \frac{1}{s'} \text{Im} \left\{ \frac{1}{f(s')} \right\} = - \frac{g(s')}{s'}$$

En définissant  $G_0(s)$  par :

$$G_0(s) = \frac{(s-4)}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(s') ds'}{(s'-4)(s'-s)} \quad (V.3)$$

l'expression (V.2) fournit la représentation :



$$f_0(s) = \left\{ z + \frac{s}{4}(a-z) + s G_0(s) + g_0(s) \right\}^{-1} \quad (V.4)$$

avec

$$g_0(s) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4\pi}(s-4) + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4-s}{s}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{3s}{4(4-s)}} & 0 \leq s \leq 4 \\ \frac{\sqrt{3}}{4\pi}(s-4) + \frac{s(s)}{\pi} \operatorname{Log} \left\{ \frac{\sqrt{3s+2}\sqrt{s-4}}{\sqrt{3s-2}\sqrt{s-4}} \right\} - i f(s) & 4 \leq s < 16 \end{cases} \quad (V.5)$$

Si nous étendons l'unitarité élastique à toute la région physique, nous obtenons une expression analogue, où nous devons remplacer  $g_0(s)$  par  $g_0^{el}(s)$ , donné par :

$$g_0^{el}(s) = \begin{cases} \frac{s-4}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4-s}{s}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{s}{4-s}} & 0 \leq s \leq 4 \\ \frac{s-4}{2\pi} + \frac{2}{\pi} f(s) \operatorname{Log} \left\{ \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4}}{2} \right\} - i f(s) & s \geq 4 \end{cases} \quad (V.6)$$

## 2 - Représentation de la coupure de gauche.

La contribution de la coupure de gauche est contenue dans  $G_0(s)$ , fonction qui dans le premier feuillet de  $s=0$  est régulière au voisinage de  $s=4$ . Par contre, ceci n'est pas forcément vrai dans l'autre feuillet de  $s=0$ <sup>(18)</sup>. Pour respecter les particularités de cette structure, nous utiliserons la variable uniformisante  $v$  introduite par Wanders<sup>(18)</sup>, définie par :

$$v = -i \operatorname{Log} \left\{ \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4}}{2} \right\} ; \quad s = 4 \cos^2 v \quad (V.7)$$



qui applique conformément le feuillet physique sur la bande  $0 \leq \text{Rev} \leq \frac{\pi}{2}$ . Au cours de cette transformation la fonction  $G_0(s)$  devient une fonction que nous désignons par  $G_0(v)$ , et qui vérifie la relation :

$$G_0(v) = G_0(-v) ,$$

puisque le changement de  $v$  en  $-v$  fait passer du feuillet physique au feuillet non physique. De plus, comme l'indique l'expression

(V.3),  $G_0(v) \Big|_{v=0}^{=0}$ . Nous développerons  $G_0(v)$  autour de  $s=4$  en série de puissances de  $v^2$  :

$$G_0(v) = a_2 v^2 + a_4 v^4 + a_6 v^6 + \dots \quad (\text{V.8})$$

La variable  $v^{2n} = v^{2n}(s)$  développant une partie imaginaire pour  $s < 0$ , l'expression (V.8) portée dans (V.4) donne naissance à une discontinuité à travers la coupure de gauche qui dépend de  $a_0$ ,  $z_0$  et des coefficients  $\{a_2, a_4, a_6, \dots\}$ . L'identification de cette discontinuité, à un ordre donné en  $\sqrt{s}$ , avec celle fournie par les expressions (S-a,b,c,d) permet le calcul des coefficients  $\{a_2, a_4, a_6, \dots\}$  en fonction de  $a_0$  et  $z_0$  qui sont considérés comme des paramètres libres. En vue de cette identification, il sera d'ailleurs commode de réordonner la série (V.8) de la façon suivante :

$$G_0(v) = A_2 w_2 + A_4 w_4 + A_6 w_6 + \dots \quad (\text{V.9})$$

où les  $w_N$  sont les polynômes de degré  $\frac{N}{2}$  de la variable  $v^2$  définis par :

$$i) \text{ Im } \{w_N(v^2)\} \approx (\sqrt{s})^{N-1} \quad N \text{ pair } \geq 2$$



$$\text{ii) } w_N(v^2) = 0 \quad , \quad \text{pour } v^2 = 0 \quad (\text{V.10})$$

$$\text{iii) } \lim_{v^2 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{w_N(v^2)}{v^2} \right\} = 1 \quad , \quad \text{lorsque } v^2 \rightarrow \infty \quad (\text{Normalisation}).$$

Ces polynômes, ainsi que leurs principales caractéristiques, sont répertoriés dans le tableau (III).

Dans ce qui suit, nous nous restreindrons pour des raisons de simplicité à une représentation de la forme :

$$G_0(v) = A_2 w_2 + A_4 w_4 \quad . \quad (\text{V.11})$$

Les coefficients  $A_2$  et  $A_4$  sont calculés dans l'appendice C en ne tenant explicitement compte que des relations (S-a) et (S-b). Nous nous assurerons cependant que les autres relations sont vérifiées de façon satisfaisante lorsque les paramètres du modèle sont déterminés.

### III - Etude des contraintes concernant l'onde S seule.

La paramétrisation (V.4) que nous venons de construire rend compte par elle-même d'une partie de l'analyticité, de l'unitarité et du croisement. Il reste cependant à lui imposer les contraintes répertoriées aux paragraphes IV et V de l'appendice A. Pour cela l'arbitraire dont nous disposons est de faire varier indépendamment les paramètres  $a_0$  et  $z_0$ . Ils doivent toutefois vérifier (C-1), c'est-à-dire :

$$z_0 < a_0$$

et, en l'absence de zéros,  $a_0 z_0 > 0$ . Nous poserons donc :

$$t = a_0 / z_0 \quad ,$$



de telle sorte que :

i) si  $a_0 > 0$  , alors  $t > 1$  .

ii) si  $a_0 < 0$  , alors  $0 < t < 1$  .

### 1 - Comparaison avec les résultats de Wanders.

Puisqu'un de nos objectifs est d'étudier dans quelle mesure les résultats de Wanders sont indépendants de la paramétrisation, nous nous placerons provisoirement dans le même contexte, ce qui nous conduit à annuler le coefficient  $A_4$ . (Nous ne tenons compte que du terme en  $s\sqrt{s}$  à gauche).

Dans ce cas, la paramétrisation (V.4) devient :

$$f_0(s) = \left[ at + \frac{sa}{4} (1-t) + \frac{t^2}{3\pi} sw_2 + g_0(s) \right]^{-1} \quad (V.12)$$

L'étude des contraintes géométriques sur cette expression est particulièrement simple, aussi énoncerons nous directement nos conclusions.

i) En accord avec les résultats de Wanders, la donnée de  $a_0$  détermine  $t$  avec précision. Ce phénomène peut être facilement mis en évidence. Les contraintes (C-3,5,6) fixent le minimum de l'onde S très près du point  $s_0=1.7$ , où précisément s'annule la dérivée de  $sw_2$ . Par conséquent, en ce point  $\frac{d}{ds}\{f_0(s)\}=0$  se réduit à  $\frac{a}{4} (1-t)+g'_0(s_0)=0$  et la correspondance entre  $t$  et  $a_0$  est linéaire:

$$t = 1 + 4g'_0(s_0)a_0 . \quad (V.13)$$



ii) Par contre,  $t$  étant donné par (V.13), toutes les contraintes peuvent être vérifiées pour les valeurs de la longueur de diffusion comprises entre  $-3$  et  $3$ , ce qui est un intervalle beaucoup plus grand que celui de Wanders. Cette différence est essentiellement due à la façon d'imposer l'absence du terme  $\sqrt{s}$  dans la discontinuité de gauche : contrairement aux modèles de Wanders, cette absence dans (V.4) est naturellement réalisée, quelque soit la paramétrisation de  $G_0(v)$ .

## 2 - Test concernant l'éventualité de zéros pour l'onde S.

Si nous revenons maintenant au modèle (V.4), avec  $G_0(v)$  donné par (V.11), nous ne pouvons plus satisfaire l'ensemble des contraintes. Le remplacement de  $g_0(s)$  par  $g_0^{el}(s)$  ne modifie d'ailleurs pas ce résultat. Nous sommes donc amenés à accroître la flexibilité du modèle. Ceci peut être envisagé de plusieurs façons : nous pouvons par exemple modifier la représentation des coupures, ou supposer l'existence de zéros dans l'onde S.

Nous commencerons par aborder cette dernière éventualité, et ceci de façon très phénoménologique, puisqu'en fait nous observerons les zéros que peuvent prendre certains développements de l'onde S, arrêtés à un ordre tel que le reste puisse être estimé comme peu important.

Nous supposerons pour cela que sur le domaine non physique l'onde S peut être approchée par une forme linéaire "perturbée" par des termes représentant de façon symétrique les effets immédiats des deux coupures, c'est-à-dire à gauche le comportement correct jusqu'à l'ordre 5 en  $\sqrt{s}$ , et à droite l'unitarité au même ordre en  $\sqrt{s-4}$ .

Ceci fournit la représentation :



$$f_0(s) = z_0 + \frac{s}{4} (a_0 - z_0) + s\{z_1 v + z_2 v^2 + z_3 v^3 + z_4 v^4\} \quad (V.14)$$

où les coefficients  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  sont connus et donnés par des relations de la forme :

$$z_n = \alpha_n(a_0) + \beta_n(a_0)z_0 \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

L'application du croisement par l'intermédiaire de  $R_1$

$$R_1 \equiv \int_0^4 (4-s)(3s-4)f_0(s)ds = 0$$

permet de fixer  $z_0$  en fonction de  $a_0$  :

$$z_0 = (16a_0 + 3 \sum_{n=1}^4 \alpha_n L^n) / (16 - 3 \sum_{n=1}^4 \beta_n L^n) \quad (V.15)$$

$L^n$  étant les poids définis par :

$$L^n = \int_0^4 (3s-4)(4-s)s v^n ds \quad (V.16)$$

Nous sommes alors ramenés à une situation très voisine de celle rencontrée au paragraphe précédent. Lorsque  $-1.8 \lesssim a_0 \lesssim 1$  toutes les contraintes sont vérifiées, et deux zéros apparaissent sur le domaine non physique dès que  $0 \lesssim a_0 \lesssim 0.5$ . Ailleurs, ce modèle coïncide avec celui du paragraphe III.1.

Il est donc très probable que l'adjonction de zéros au modèle (V.4) aurait mené à l'existence de solutions. Nous ne disposons malheureusement pas d'informations rigoureuses<sup>(44)</sup> concernant cette question qui puissent être utilisées dans la construction de modèles. Nous tiendrons cependant compte de cette



remarque en proposant, au chapitre suivant, des modèles qui peuvent concilier l'existence de zéros — en nombre et position variable — avec l'unitarité élastique exacte.

Enfin, il faut aussi constater que dans la mesure où le modèle (V.14) ne prévoit de zéros que sur le domaine non physique, la possibilité d'obtenir des longueurs de diffusion négatives reste écartée.

Il faut donc éventuellement envisager d'autres modifications : nous pouvons par exemple essayer d'estimer l'importance que devraient avoir les effets inélastiques pour que les contraintes puissent être à nouveau satisfaites.

### 3 - Test des effets inélastiques.

Pour  $s \gg 16$ , l'unitarité peut s'écrire

$$\text{Im} f_0^{-1}(s) = -\eta(s)\rho(s) \quad (\text{V.17})$$

où  $\eta(16)=1$ ,  $\eta(s) \geq 1$  pour  $s \gg 16$ .

En l'absence d'autres informations sur  $\eta(s)$ , nous en choisirons la représentation la plus simple possible, en posant :

$$\eta(s) = 1 + \lambda(s-16) \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad 16 \leq s < 36 \quad .$$

En utilisant le contour  $\Gamma'$  de la figure (2), nous pouvons reprendre la méthode qui a conduit au modèle (V.4), pour obtenir :

$$f_0(s) = \left\{ z + \frac{s}{4}(a-z) + sG_0(s) + g_1(s) \right\}^{-1} \quad (\text{V.18})$$



avec  $g_1(s) = \frac{(s-4)}{3\pi} \left\{ \sqrt{2} - 4\lambda(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \right\} + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{4-s}{s}} h_1(s)$

$$h_1(s) = \left\{ 1 + \lambda(s-16) \right\} A_2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2s}{4-s}} - \lambda(s-16) A_4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3s}{4(4-s)}}$$

$G_0(s)$  a toujours la forme  $G_0(s) = A_2 w_2 + A_4 w_4$ , où les coefficients  $A_2$  et  $A_4$  sont maintenant fonction de  $\lambda$ , par l'intermédiaire de  $d_1$  et  $e_2$  (cf. appendice C).

Ce modèle est un modèle à trois paramètres. Pour  $a_0$  fixé dans l'intervalle  $-0,5 \leq a_0 \leq 0,5$ ,  $t$  proche de la détermination (V.13), on peut trouver des valeurs de  $\lambda$ ,  $\lambda = \lambda(a_0, t)$ , de telle sorte que toutes les contraintes sont satisfaites.

Par exemple, pour  $a_0 = -0,1$  (nous avons choisi une valeur négative compte tenu de la dernière remarque du paragraphe précédent), on trouve  $t = 0,96$ ,  $\lambda = 18$ . L'onde S correspondante est représentée sur la figure (3).

Compte tenu des valeurs élevées de  $\lambda$  ainsi obtenues, et dans la mesure où notre paramétrisation de  $\eta(s)$  n'est pas complètement inadaptée, il n'apparaît donc pas réaliste de chercher à améliorer le modèle en introduisant un facteur d'inélasticité. En ce sens, un résultat plus naturel peut être obtenu en modifiant uniquement la structure de la coupure de gauche, en posant par exemple :

$$G_0(v) = A_2 w_2 + A_4 w_4 + A_6 w_6 \quad ,$$

où  $A_6$  est un terme libre.

Pour essayer d'obtenir une nouvelle confirmation de la



détermination précédente, nous allons maintenant associer à cette onde S un modèle d'onde D et étudier les contraintes liant le couple  $S \sim D$ .

## VI - Paramétrisation de l'onde D.

Nous avons remarqué au troisième paragraphe que la donnée de l'onde S détermine la discontinuité de l'onde D à travers la coupure de gauche jusqu'à l'ordre  $\frac{9}{2}$ . Ceci est exprimé par les relations (D-a,b,c,d) de l'appendice A. En utilisant une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée pour l'onde S, on peut construire un modèle d'onde D ayant la discontinuité de gauche correcte à l'ordre  $\frac{5}{2}$ . Ceci n'apparaît cependant pas entièrement satisfaisant<sup>(17)</sup>.

Pour exploiter complètement et simplement cette information, il suffit de remarquer que la fonction définie par :

$$\hat{f}_2(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty Q_2\left\{\frac{zs'}{4-s} - 1\right\} \Im f_0(s') ds' \quad (V.19)$$

possède la même discontinuité que l'onde D jusqu'à l'ordre  $\frac{9}{2}$  inclus, puisque :

$$\Im Q_2(z) = -\frac{\pi}{2} P_2(z) \quad -1 < z < 1.$$

Compte tenu de la représentation de Froissart-Gribov pour l'onde D, la fonction  $\hat{f}_2(s)$  constitue une première approximation à  $f_2(s)$ . Cette approximation suffit à vérifier les quelques contraintes dont nous disposons pour l'onde D seule, notamment<sup>(45)</sup> :



$$\frac{df_2(s)}{ds} < 0 \quad , \quad \text{pour } 1.742 \leq s < 4.$$

Elle ne peut cependant {cf. figure (4)} satisfaire les contraintes liant les ondes S et D. Nous choisirons donc la représentation :

$$f_2(s) = \hat{f}_2(s) + \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^{\infty} Q_2 \left\{ \frac{2s'}{4-s} - 1 \right\} \overline{R}(s') ds' \quad (V.20)$$

$$\text{avec } \overline{R}(s') = g(s') \left[ \frac{s'-4}{s'} \right]^4 \left\{ r_0 + r_1 \left[ \frac{s'-4}{s'} \right] \right\}$$

qui peut s'interpréter comme une approximation à deux paramètres  $r_0$  et  $r_1$ , de  $A(s',0) - \text{Im}f_0(s')$  à basse énergie.

## VII - Etude des contraintes s'exerçant entre les ondes S et D.

Nous disposons des contraintes de A. Martin (Tables I-a et II-a) et des relations  $R_1$  à  $R_5$  de R. Roskies.

### 1 - Inégalités de la Table I-a.

Pour une onde S donnée - nous choisissons la détermination correspondant à la figure (3) - cette table impose des bornes inférieures et supérieures à l'onde D en divers points, essentiellement répartis entre  $s=0$  et  $s=1$ . Comme on peut le voir sur la figure (4), ces bornes sont généralement très fines. Avec la détermination :

$$\overline{R}(s') = g(s') \left[ \frac{s'-4}{s'} \right]^4 \left\{ 3.9 - 5.7 \frac{s'-4}{s'} \right\}$$

qui, négative pour  $s' \geq 20$ , viole la condition de positivité, on



peut néanmoins obtenir les résultats satisfaisants de la figure (4).

## 2 - Relations de croisement.

Nous avons calculé les valeurs de ces intégrales avec  $f_2(s) \equiv 0$ , puis avec  $f_2(s) = \hat{f}_2(s)$  et enfin avec la détermination précédente pour l'onde D. Ces résultats figurent dans le tableau ci-dessous en lignes I, II et III respectivement.

|     | $R_1$   | $R_2$   | $R_3$    | $R_4$    | $R_5$    |
|-----|---------|---------|----------|----------|----------|
| I   | -0.015  | -0.067  | 0.0062   | 0.032    | -0.011   |
| II  | -0.0075 | -0.0331 | 0.0029   | 0.015    | -0.0063  |
| III | 0.00062 | 0.00031 | -0.00059 | -0.00028 | -0.00045 |

Compte tenu de la positivité de  $f_2(s)$ , les intégrales  $R_1, R_2$  et  $R_3$  de la première ligne doivent avoir un signe défini : ceci est bien le cas ( $R_1 < 0$ ,  $R_2 < 0$ ,  $R_3 > 0$ ). Les résultats numériques obtenus ici ne semblent pas cependant indiquer de fortes contraintes : ceci est en fait confirmé dans une étude systématique réalisée par M.R. Pennington<sup>(46)</sup>.

Une légère amélioration apparaît lorsque l'on remplace  $f_2(s)$  par  $\hat{f}_2(s)$  [ligne II]. La détermination (V.20) réalise une bonne minimisation des 5 relations [ligne III].

Il semble d'ailleurs mieux adapté aux procédés de calcul numérique de chercher à satisfaire ces relations, par exemple en minimisant la fonction  $F$  définie par :



$$F = \sum_{n=1}^S R_n^2$$

Nous mettons alors en évidence de nombreux minimum relatifs parmi lesquels nous sélectionnons ceux qui vérifient les inégalités de la table I-a. Cette méthode d'exploration sera systématiquement utilisée au chapitre suivant.

### 3 - Table II-a.

Ces inégalités sont encore plus fines que celles du tableau I-a. Avec la détermination précédente de l'onde D nous pouvons néanmoins obtenir un résultat satisfaisant qui est répertorié dans le tableau II-b.

## VII - Conclusion.

Cette étude nous apporte donc d'abord une confirmation de la tendance déjà observée par Wanders. En effet, nous avons obtenu des résultats analogues à partir de paramétrisations très différentes. En outre, ces résultats ne se sont pas révélés contradictoires lorsqu'un plus grand nombre de contraintes ont été utilisées.

Nous savons d'autre part<sup>(41,47,48)</sup>, que l'ensemble  $S \sim D$  contrôle étroitement les ondes partielles de moment angulaire plus élevé. Il semble donc que les nombreuses amplitudes mises en évidence par D. Atkinson<sup>(19)</sup> prennent des valeurs très voisines à basse énergie, et ceci malgré l'arbitraire dont elles disposent en principe.

Enfin, sur un plan plus pratique, cette étude nous a apporté une expérience de détail qui sera mise à profit dans les



paramétrisations du chapitre suivant. Nous retiendrons surtout l'importance prise par la soustraction à l'origine et la nécessité de ne pas empêcher l'apparition de zéros dans l'onde S.



## CHAPITRE VI

### Extension des méthodes précédentes à l'étude de l'interaction pion-pion à basse énergie.

#### I - Introduction.

Nous venons de constater qu'à partir des résultats rigoureux de la théorie axiomatique des champs il semble possible d'émettre un certain nombre de prévisions concernant la diffusion pion-pion dans le cas neutre.

Ces prévisions sont évidemment issues de l'équilibre qui a pu être établi entre le nombre des paramètres nécessaires et celui des contraintes disponibles. De ce point de vue la situation réelle, où il faut tenir compte des différents états de spin isotopique, paraît moins favorable, bien que la plupart des contraintes puissent être généralisées, comme nous l'indiquons dans l'appendice B. L'accroissement de leur nombre ne peut en effet compenser celui des paramètres que l'on doit introduire pour conserver dans chaque onde partielle le type de représentation éprouvé dans le cas neutre.

Pourvu que ce déséquilibre soit compensé par un certain apport phénoménologique, l'information contenue dans ces contraintes peut être concrètement exploitée : ceci constitue l'objet du présent chapitre. Il comporte trois étapes, chacune d'elles étant caractérisée par l'étude des ondes  $S^{(20)}$ , puis des ondes  $S$  et  $P^{(20)}$ , et enfin des ondes  $S$ ,  $P$  et  $D^{(49)}$ . Cette progression nous permettra notamment de ramener l'emprunt phénoménologique à l'un de ses élé-



ments les plus sûrs : l'existence du méson  $\rho$ , de position et de largeur données.

Avant d'aborder cette question, nous ferons cependant un bref rappel de la situation expérimentale.

### III - La situation expérimentale.

En dépit des nombreux efforts qui lui ont été consacrés ces dix dernières années, notre connaissance expérimentale de l'interaction pion-pion demeure quelque peu confuse<sup>(14)</sup>.

Les processus les mieux adaptés à cette étude, c'est-à-dire ceux où les seules particules à interactions fortes sont des pions, ne peuvent en effet être exploités que depuis peu et ne fournissent pas encore de statistique significative.

On peut citer la désintégration des mésons  $K$ <sup>(50)</sup>:

$$K \rightarrow 2\pi e\nu$$

$$K_S^0 \rightarrow 2\pi \quad ,$$

et, en ce qui concerne l'isospin 1, l'annihilation positon-négaton<sup>(51)</sup>

$$e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad .$$

En fait, la plupart des informations expérimentales actuelles proviennent de la production d'un pion dans l'interaction pion-nucléon<sup>(52)</sup>, les processus les plus couramment utilisés étant :

$$\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$$

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^+ + \pi^- \quad .$$



A partir de ces diffusions, la détermination de l'amplitude pion-pion est concrètement réalisée au moyen d'un prolongement analytique, selon la méthode proposée par Chew et Low<sup>(53)</sup>. En dépit des nombreux travaux qui ont été consacrés au problème du prolongement analytique<sup>(54)</sup>, une telle procédure s'avère encore très sensible aux techniques employées<sup>(55)</sup> : vus dans leur ensemble, les résultats finissent par paraître très divergents. Il faut d'ailleurs ajouter à ce genre d'incertitude l'ambiguïté "up-down"<sup>(56)</sup> rencontrée dans la détermination du déphasage  $\delta_0^0$  de l'onde S dans l'isospin 0 à partir de l'amplitude  $\pi^+\pi^-$ . Cette ambiguïté ne permet pas, pour une amplitude donnée, de distinguer entre  $\delta_0^0$  et

$$\delta_1^1 + \frac{\pi}{2} - \delta_0^0, \text{ du moins aux alentours du } \rho,$$

Compte tenu de ces difficultés, un seul résultat sûr émerge de l'analyse expérimentale à basse et moyenne énergie<sup>(52)</sup> : l'existence d'une résonance dans l'onde P, le méson  $\rho$ , de position  $M_\rho \approx 760$  MeV et de largeur  $\Gamma_\rho \approx 120,130$  MeV. Comme on peut le constater sur la figure (5), les informations actuellement acquises, qui concernent essentiellement les ondes S et P, ne sont relativement concordantes qu'entre 500 MeV et 1 GeV environ.

L'allure des déphasages à très basse énergie, la valeur des longueurs de diffusion notamment, ainsi que l'éventualité, entre 700 et 900 MeV, d'une résonance dans l'onde S d'isospin 0, le  $\sigma$ , restent à préciser.

### III - Etude préliminaire des ondes S.

Ce travail<sup>(20)</sup>, qui a été effectué avant qu'apparaissent les relations de Roskies et les contraintes pour le cas chargé, se limite à l'étude de la combinaison neutre  $f_0^0(s) + 2f_0^2(s)$ ,



$(f_{\ell}^I(s))$  désigne l'onde partielle d'isospin  $I$  et de moment angulaire  $\ell$ ).

Plus précisément, nous désirons examiner dans quelle mesure l'action des contraintes sur cette combinaison neutre peut aider à la détermination de l'onde  $S$  dans un des deux isospins lorsque l'onde  $S$  dans l'autre isospin est supposée connue. En fait, c'est l'onde  $S^{I=2}$  qui sera considérée comme pratiquement fixée car, nous allons le voir, son allure générale sur la région physique peut être restituée par un modèle particulièrement simple.

Comme nous l'avons déjà indiqué<sup>(14)</sup>, nous ne tiendrons pas compte des effets inélastiques. Dans chaque onde partielle, l'unitarité s'écrit donc :

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{f_{\ell}^I(s)} \right\} = -\rho(s), \quad s \geq 4; \quad \rho(s) = \sqrt{\frac{s-4}{s}} \quad (\text{VI.1})$$

Nous avons remarqué au chapitre précédent que les paramétrisations reposant sur une relation de dispersion pour l'inverse de l'onde partielle dépendent du choix effectué en ce qui concerne les zéros. Compte tenu de nombreuses remarques, tant expérimentales que théoriques<sup>(60)</sup>, nous imposerons ici :

- i) Un zéro  $s_0$  de position arbitraire pour l'onde  $f_0^0(s)$ .
- ii) Un zéro fixé à  $s=0$  pour l'onde  $f_0^2(s)$ .

### 1) Modèle pour l'onde $f_0^0(s)$ .

Soit  $h(s)$  la fonction de Chew-Mandelstam, définie par :



$$h(s) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{4-s}{s}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{s}{4-s}} \quad 0 \leq s \leq 4$$

(VI.2)

$$h(s) = \frac{2}{\pi} p(s) \log \left\{ \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4}}{2} \right\} - i g(s) \quad s \geq 4$$

Compte tenu de nos hypothèses, la fonction

$$G^\circ(s) = (s-s_0) \left\{ f_0^\circ(s) - h(s) \right\} \quad (\text{VI.3})$$

ne possède que la coupure de gauche et est analytique dans D. On peut écrire une relation de dispersion deux fois soustraite (aux points  $s=0$  et  $s=4$ ) le long du contour  $\gamma$  de la figure (2) :

$$G^\circ(s) = \frac{s}{4} G^\circ(4) - \frac{s-4}{4} G^\circ(0) + \frac{s(s-4)}{2i\pi} \int_\gamma \frac{G^\circ(s') ds'}{s'(s'-4)(s'-s)} \quad (\text{VI.4})$$

Comme au chapitre précédent, l'intégrale sera estimée par le terme  $s A_2^\circ w_2(s)$ , où le coefficient  $A_2^\circ$  est calculé pour restituer le bon comportement en  $s\sqrt{s}$  de  $\operatorname{Im} f_0^\circ(s)$  à l'origine (cf. appendice C). Il vient :

$$A_2^\circ = s_0 I_3^\circ / z_0^2 w_2^3 \quad (z_I = f_0^\circ(0)) \quad (\text{VI.5})$$

Par conséquent :

$$f_0^\circ(s) = \left\{ G^\circ(s) / (s-s_0) + h(s) \right\}^{-1} \quad (\text{VI.6})$$

$$G^\circ(s) = s(4-s_0)/4 a_0 + (s-4) \left( \frac{s_0}{z_0} + \frac{2s_0}{\pi} \right) / 4 + s A_2^\circ w_2(s)$$

Ce modèle dépend donc de quatre paramètres ; les longueurs de



diffusion  $a_0$  et  $a_2$ ,  $z_0$  et  $s_0$ .

## 2) Modèle pour l'onde $f_0^2(s)$ .

Dans ce cas, nous considérerons la fonction :

$$G^2(s) = s \left\{ (f_0^2(s))^{-1} - h(s) \right\}$$

qui ne possède que la coupure de gauche, et dont la partie imaginaire se comporte à l'origine comme  $\sqrt{s}$ . Nous écrirons donc :

$$G^2(s) = 4/a_2 + A_2^2 w_2(s)$$

avec  $A_2^2$  calculé comme précédemment :

$$A_2^2 = -16 I_3^2 / a_2^2 w_2^3$$

Finalement :

$$f_0^2(s) = \left\{ 4/sa_2 + A_2^2 w_2(s)/s + h(s) \right\}^{-1} \quad (\text{VI.7})$$

et cette paramétrisation ne dépend que des longueurs de diffusion  $a_0$  et  $a_2$ .

## 3) Résultats.

En faisant varier  $a_2$  entre -0.05 et -0.1, le rapport  $\left| \frac{a_0}{a_2} \right|$  étant fixé de l'ordre de  $\frac{5}{2}$ , le modèle (VI.7) fournit des déphasages  $\delta_0^2(s)$  en accord avec les résultats expérimentaux<sup>(14)</sup>. [ Voir fig. (6-b) ]. Nous faisons varier les trois paramètres restant ( $a_0, z_0$  et  $s_0$ ) de telle sorte que les contraintes sur la combinaison neutre



soient satisfaites.

Il apparaît que la donnée de  $a_0$  (possible seulement dans l'intervalle  $-0.16 \lesssim a_0 \lesssim 0.1$ ) fixe  $z_0$  et  $s_0$  ( $3 \lesssim s_0 \lesssim 10$ ) à une précision telle que deux déphasages correspondant à la même valeur de  $a_0$  ne commencent à différer d'un degré qu'à  $s \approx 12$ . On ne peut se prononcer quant à l'existence du  $\sigma$ . Néanmoins, l'allure générale des déphasages est conforme aux résultats expérimentaux (cf. fig (6-a)).

Dans la mesure où nous désirons des informations plus précises, il n'apparaît pas réaliste de fixer plus ou moins arbitrairement une des deux ondes  $S$  : elles doivent être traitées de façon complètement symétrique. Ceci est l'objet des prochains paragraphes.

#### IV - Choix d'une autre méthode d'unitarisation.

Il est clair que nous ne pouvons efficacement aborder cette étude qu'après avoir ramené le nombre des paramètres à leur strict nécessaire. En fait, seules les valeurs prises par les ondes partielles aux points  $s=0$  et  $s=4$  figurent explicitement dans nos équations : nous renoncerons à particulariser la position de leurs zéros.

Ceci peut être réalisé dans le cadre de la méthode N/D. Cette méthode s'avérant peu adoptée à notre mode de détermination de  $N$ , nous en adopterons une version simplifiée qui s'est avérée utile dans l'étude de l'onde  $P^{(61)}$  et des ondes  $S$ , lorsqu'il s'agissait par exemple d'unitariser les amplitudes fournies par les algèbres de courant<sup>(62)</sup>.



Cette méthode consiste à écrire l'onde partielle sous la forme :

$$f_e^I(s) = \frac{N_e^I(s)}{1 + N_e^I(s) D_e^I(s)} \quad (\text{VI.8})$$

où

-  $N_\ell^I(s)$  a la coupure de gauche et est méromorphe dans  $D$ , puisqu'un pôle de  $N_\ell^I(s)$  n'implique pas en général de singularité pour  $f_\ell^I(s)$ .

-  $D_\ell^I(s)$  est donnée par :

$$D_\ell^I(s) = h(s) + k_\ell^I(s), \quad (\text{VI.9})$$

$h(s)$  étant la fonction de Chew-Mandelstam déjà évoquée en (V.2), et  $k_\ell^I(s)$  une fonction analytique réelle arbitraire.

Des conditions asymptotiques données peuvent concourir à la détermination de  $k_\ell^I(s)$  : ici, ces conditions nous faisant défaut, nous déterminerons  $k_\ell^I(s)$  de façon à pouvoir fixer aussi simplement que possible  $N_\ell^I(s)$ . En choisissant la détermination :

$$k_e^I(s) = -\frac{2}{\pi} + \frac{s}{6\pi} + s^2 \overline{k_e^I(s)} \quad (\text{VI.10})$$

où  $\overline{k_e^I(s)}$  est arbitraire,  $D_\ell^I(s)$  se comporte comme  $s^2$  à l'origine : comme nous le verrons dans l'appendice C, ceci implique que :

$$\Im N_e^I(s) = \Im f_e^I(s) + O(s^3 \sqrt{s}) \quad s \leq 0 \quad (\text{VI.11})$$

relation qui simplifie considérablement le calcul de  $N_\ell^I(s)$ .

Nous ferons par ailleurs deux remarques.



i) Dans de nombreux modèles<sup>(61)</sup>,  $k_{\ell}^I(s)$  est remplacé par une constante.

ii) Une résonance peut apparaître au point  $s=s_R$  lorsque

$$1 + N_e^I(s_R) \operatorname{Re} D_e^I(s_R) = 0$$

Si, en ce point,  $\operatorname{Re}\{D_{\ell}^I(s_R)\} > 0$ , alors  $N_{\ell}^I(s_R) < 0$ . Un déphasage positif sur la région physique (comme  $\delta_1^I(s)$  probablement) ne peut donc présenter de résonance que si  $N_{\ell}^I(s)$  a au moins un pôle au point  $s_p$ ,  $4 < s_p < s_R$ .

Nous ne désirons cependant pas avoir à introduire des pôles dans  $N_{\ell}^I(s)$ , car ceci nous poserait un problème de paramétrisation comparable à celui des zéros, problème que nous avons précisément voulu éviter. Nous imposerons donc à la partie réelle de  $D_{\ell}^I(s)$  d'être négative dans la région des résonances.

Pour tenir compte de ces deux remarques, nous choisirons :

$$\overline{k_e^I(s)} = \frac{-1}{12\pi s_I} \quad , \quad 4 < s_I \leq 10 \quad (\text{VI.12})$$

puisque ce choix garantit simultanément que :

i)  $k_{\ell}^I(s)$  est stationnaire sur le domaine des basses énergies.

ii)  $\operatorname{Re}\{D_{\ell}^I(s)\}$  est négatif dans la région des résonances.



# V - Etude des ondes S et P.

## 1) Paramétrisation des ondes partielles.

D'après (VI.8), la donnée des ondes partielles est subordonnée à celle de  $s_I$  et de  $N_\ell^I(s)$ . Cette fonction ne possède que la coupure de gauche et (cf. (VI.11)) se comporte à l'origine comme l'onde partielle elle-même.

Compte tenu des résultats du chapitre précédent, nous écrirons :

$$N_\ell^I(s) = (s-4)^\ell \left\{ \frac{s}{4} \tilde{a}_I + \frac{(s-4)}{(-4)^{\ell+1}} z_I + s A_2^I w_2(s) + s A_4^I w_4(s) + \dots \right\} \quad (\text{VI.13})$$

où  $\tilde{a}_I$  est donné par  $\tilde{a}_I = N_0^I(4) = \frac{a_I}{1-a_I D_0^I(4)}$  pour  $I=0$  et  $2$

$$\text{par } \tilde{a}_I = a_1 = \lim_{s \rightarrow 4} \left\{ \frac{f_1^1(s)}{s-4} \right\} \quad \text{pour } I=1.$$

$$(z_I = f_\ell^I(0) ; I = 0, 1, 2).$$

Les coefficients  $A_n^I$  sont calculés (cf. appendice C) en fonction de  $a_I$ ,  $z_I$  et  $s_I$ , qui sont considérés comme des paramètres libres, de façon à ce que le modèle ait le comportement correct à  $s=0$ , prévu par les relations de l'appendice B.

Pour les ondes S, en raison de certaines difficultés qui apparaissent dans ce calcul, nous restreindrons le développement (VI.13) à deux termes,  $A_2^I$  et  $A_4^I$  : le comportement à  $s=0$  n'est correct qu'en ce qui concerne les termes  $\sqrt{s}$ ,  $s\sqrt{s}$  et  $s^2\sqrt{s}$ .



Par contre, pour l'onde P il l'est jusqu'à l'ordre  $s^4\sqrt{s}$ , ce qui est le maximum que l'on puisse faire en l'absence d'ondes D.

A ce stade, nous disposons de 9 paramètres ( $a_I, z_I, s_I$ ) pour satisfaire les cinq règles de somme de Roskies et les inégalités des appendices A et B : aucun résultat significatif ne peut être obtenu, en particulier dans l'onde P. Nous imposons donc l'existence du  $\rho$ , avec une position donnée  $s_\rho = 29$ , ce qui permet d'éliminer  $z_1$ , et une largeur  $\Gamma_\rho$  d'approximativement 120 MeV, ce qui fixe  $s_1$ . Nous décidons de plus de prendre  $s_I$ , pour  $I=0$  et 2, égal à  $s_1$  : tous calculs faits, nous vérifierons la stabilité des résultats pour les variations de  $s_I$  autour de  $s_1$ .

Ceci ramène le nombre des paramètres à cinq : les trois longueurs de diffusion et les valeurs à l'origine des ondes S. Nous cherchons à les déterminer en minimisant la fonction

$$F = \sum_{n=1}^5 R_n^2$$

à l'aide du programme MINUIT. Nous constatons que, lorsque  $R_n \approx 10^{-4}$ , toutes les autres contraintes sont satisfaites. (Il faut toutefois remarquer que les contraintes d'Auberson<sup>(40)</sup> n'ont pas été testées).

## 2 ) Analyse des résultats.

Les ensembles des déphasages solutions de ce problème sont contenus, pour les isospins 0, 2 et 1, dans les régions respectivement délimitées par les courbes Ia et Ib, IIa et IIb, IIIa et IIIb de la figures (7).



Les frontières de ces domaines sont elles-mêmes constituées par des déphasages associés. Ainsi Ia, IIa et IIIa forment une famille  $\delta_0^0$ ,  $\delta_0^2$  et  $\delta_1^1$  caractérisée par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.38 & m_\sigma &= 670 \text{ MeV} \\ a_2 &= -0.18 & \Gamma_\sigma &= 335 \text{ MeV} \\ a_1 &= 0.032 \end{aligned}$$

De même, Ib, IIb et IIIb correspondent à :

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.19 & m_\sigma &= 750 \text{ MeV} \\ a_2 &= -0.18 & \Gamma_\sigma &= 167 \text{ MeV} \\ a_1 &= 0.0078 \end{aligned}$$

Il apparaît donc notamment que :

i) Dans l'isospin 0, le  $\sigma$  est toujours présent.

ii) Le comportement de l'onde  $s^2$  s'avère relativement pathologique : entre II-a et II-b l'éventail des solutions possibles est très ouvert. La longueur de diffusion varie entre -0.1 et -0.18 et de très nombreux déphasages deviennent positifs à basse énergie, ce qui semble contredire la plupart des résultats expérimentaux<sup>(14)</sup>.

iii) Une solution de continuité (Ib,IIb) apparaît entre ces déphasages et ceux du paragraphe précédent. Ce résultat nous semble très encourageant, d'autant plus que nous pouvons essayer de l'améliorer dans deux directions :

- En imposant aux ondes S de satisfaire à toutes les conditions au seuil  $s=0$ .



- En introduisant les ondes D. Nous pouvons en fournir une représentation simple, du type de celle étudiée au chapitre précédent, à partir des ondes S et P. La cohésion de l'ensemble {S,P,D} peut alors être vérifiée au moyen des relations de Roskies ou de Martin sur les combinaisons neutres.

Nous aborderons ce point pour terminer.

## VI - Etude globale des ondes S, P et D.

### 1 - Paramétrisation des ondes S et P.

Nous conserverons les modèles des paragraphes précédents, en améliorant toutefois la représentation de la coupure de gauche :

$$\ell=0; \quad N_0^I(s) = z_I + \frac{s}{4}(\tilde{a}_I - z_I) + s(s-4) \left\{ A_0^I + A_2^I w_2 + A_4^I w_4 + A_6^I w_6 + A_8^I w_8 \right\} \quad (\text{VI.14})$$

$$\ell=1; \quad N_1^I(s) = (s-4) \left\{ \frac{s a_1}{4} + \frac{s-4}{16} z_1 \right\} + s(s-4) \left\{ A_2^1 w_2 + A_4^1 w_4 + A_6^1 w_6 + A_8^1 w_8 \right\} \quad (\text{VI.15})$$

Les douze coefficients  $A_n^I$  ( $n=2,4,6,8$ ) sont calculés en appendice C en fonction de sept paramètres libres :

- les trois longueurs de diffusions  $a_I$ .
- les valeurs à l'origine  $z_I$  et les coefficients  $A_0^I$  des ondes S.

### 2 - Représentation des ondes D.

Par l'intermédiaire de la représentation de Froissart-Gribov :



$$0 \leq s < 4; \quad f_2^I(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty Q_2(z') C_J^I A^I(s',s) ds'; \quad z' = \frac{2s'}{4-s} - 1 \quad (\text{VI.16})$$

les ondes S et P de la voie t fournissent une contribution de base aux ondes D sur la région non physique, que nous noterons  $\hat{f}_2^I(s)$  :

$$\hat{f}_2^I(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty Q_2(z') \left\{ C_0^I \mathcal{H}_{f_0}^0(s') + 3C_1^I \mathcal{H}_{f_1}^1(s') \left[ 1 + \frac{2s}{s'-4} \right] + C_2^I \mathcal{H}_{f_0}^2(s') \right\} ds' \quad (\text{VI.17})$$

Nous remarquerons que  $\hat{f}_2^I(s)$  ne possède que la coupure de gauche où, compte tenu des résultats de l'appendice B :

$$\mathcal{H}_{f_2}^I(s) = \mathcal{H}_{f_2}^I(s) + O(s\sqrt{s})$$

Nous adopterons donc la représentation :

$$f_2^I(s) = \hat{f}_2^I(s) + \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty Q_2(z') R^I(s') ds' \quad (\text{VI.18})$$

$$\text{où } R^I(s') = g(s') \left\{ \frac{s'-4}{s'} \right\}^4 \left\{ b_0^I + b_1^I \frac{s'-4}{s'} + b_2^I \left( \frac{s'-4}{s'} \right)^2 + b_3^I \left( \frac{s'-4}{s'} \right)^3 \right\}$$

ce qui peut être considéré comme une approximation, à basse énergie et pour  $s \approx 0$ , de la contribution à  $A^I(s',s)$  des ondes partielles pour  $\ell \geq 2$ .

Les coefficients  $b_0^I, b_1^I, b_2^I$  et  $b_3^I$  sont calculés en satisfaisant huit des dix relations de croisement entre les ondes S, P et D. Il nous reste alors sept de ces règles de somme, que nous devons vérifier au moyen des sept paramètres libres du paragraphe IV.1.



### 3 - Recherche des solutions.

Nous cherchons les valeurs de ces paramètres en minimisant la fonction  $F$ , définie comme précédemment :

$$F = \sum_1^7 R_m^2$$

Ce problème est en fait simplifié par certaines relations qui doivent être vérifiées a priori. Par exemple, on peut obtenir par croisement :

$$z_0 = \frac{a_0}{3} + \frac{5a_2}{3} - \frac{1}{3\pi} \int_4^{\infty} \varphi(z'') \left\{ A^0(s'_0) + 3A^1(s'_0) + 5A^2(s'_0) \right\} ds' \quad (\text{VI.19})$$

et

$$z_0 + 2z_2 = a_0 + 2a_2 - \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \varphi(z'') \left\{ A^0(s'_0) + 2A^2(s'_0) \right\} ds' \quad (\text{VI.20})$$

avec

$$z'' = \frac{s'}{2} - 1, \quad \varphi(z) = \sum_{l \text{ pair} \geq 2} (2l+1) Q_l(z) = \frac{z}{z^2-1} - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{z+1}{z-1} \right\}$$

Les relations (VI.19) et (VI.20) fournissent donc les contraintes:

$$z_0 < \frac{a_0}{3} + \frac{5a_2}{3} - \frac{1}{3\pi} \int_4^{30} \varphi(z'') \left\{ \gamma_{f_0}^0(s') + 9\gamma_{f_1}^1(s') + 5\gamma_{f_0}^2(s') \right\} ds' < \frac{a_0}{3} + \frac{5a_2}{3} \quad (\text{VI.21})$$

$$z_0 + 2z_2 < a_0 + 2a_2 - \frac{1}{\pi} \int_4^{30} \varphi(z'') \left\{ \gamma_{f_0}^0(s') + 2\gamma_{f_0}^2(s') \right\} ds' < a_0 + 2a_2 \quad (\text{VI.22})$$

Ces inégalités nous guident dans la recherche des minimums et nous servent de critère de convergence : lorsque  $R_n \approx 10^{-8}$  les contraintes peuvent être toutes satisfaites à une ou deux exceptions près. Nous affinons alors les plages de solution obtenues en vérifiant que les contraintes améliorées (obtenues en remplaçant les ordres 2 et 4 par 3 et 5 dans les équations (VI.19) et (VI.20)) sont satisfaites.



réinjectant les ondes S et P comme en (VI.21) et (VI.22)) sont également satisfaites.

## VII - Analyse des Résultats.

Chaque solution nous fournit une famille de cinq déphasages associés, du type de celle représentée fig.(9).

L'aspect global des déphasages obtenus, du moins dans les ondes S et P, est schématisé par la figure (8), où nous représentons les plages que peuvent couvrir les déphasages correspondant à l'ensemble de nos solutions.

Nous insisterons essentiellement sur l'évolution enregistrée entre les résultats actuels et ceux de notre travail précédent, symbolisée par le passage de la figure (7) à la figure (8).

Il apparaît notamment que :

- Dans l'onde  $S^0$ , les solutions se sont nettement regroupées, par élimination des déphasages de longueur de diffusion négative ( $0.18 \lesssim a_0 \lesssim 0.26$ ). Nous obtenons systématiquement une résonance aux environs de  $m_\sigma = 710$  MeV, de largeur  $\Gamma_\sigma$  ( $260\text{MeV} \lesssim \Gamma_\sigma \lesssim 270\text{MeV}$ ).
- L'onde  $S^2$  conserve son comportement quelque peu inattendu, avec une nette amélioration cependant : le zéro le plus proche est maintenant aux environs de 740 MeV. La longueur de diffusion varie dans l'intervalle  $-0.12 \lesssim a_2 \lesssim -.08$ .
- L'onde P, très stable, est conforme aux résultats expérimentaux les plus précis<sup>(52)</sup>. La longueur de diffusion est comprise entre 0.010 et 0.016.



- Les ondes D ne sont pas unitaires : les déphasages sont fournis par :

$$\sin 2 \delta_2^I(s) = 2 \rho(s) f_2^I(s)$$

Ils ne peuvent être sérieusement considérés qu'à basse énergie, où nous obtenons :

$$a_2^0 \approx 0.00037$$

$$a_2^2 \approx 0.00013 \quad .$$

A titre d'exemple, la figure (9) représente une famille de cinq déphasages associés, caractérisés par :

|                   |                                   |                                 |                   |
|-------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------|
| $a_0 = 0.261$     | $a_2 = -0.116$                    | $a_1 = 0.00158$                 |                   |
| $z_0 = -0.139$    | $z_2 = 0.0536$                    | $z_1 = -0.00602$                | $a_2^0 = 0.00037$ |
| $A_0^0 = 0.00046$ | $A_0^2 = 0.000194$                | $s_1 = 8.9$                     | $a_2^2 = 0.00013$ |
|                   | $m_\sigma = 720 \text{ MeV}$      | $m_\rho = 756 \text{ MeV}$      |                   |
|                   | $\Gamma_\sigma = 264 \text{ MeV}$ | $\Gamma_\rho = 140 \text{ MeV}$ | .                 |

Le comportement sur la région non physique des ondes partielles correspondantes est représenté sur les figures (10), (11) et (12) ; on peut trouver dans les tableaux IV.C, IV.D, V.C, V.D, VI.A et VI.B le détail des résultats fournis par l'étude des différentes contraintes.



## CHAPITRE VII

### CONCLUSION

Les résultats que nous avons présentés dans cette seconde partie ne sont pas seulement des produits de la théorie axiomatique des champs et de l'unitarité : ils dépendent évidemment aussi des paramétrisations employées.

Au cinquième chapitre en particulier, nous avons essayé d'estimer les effets de ce type d'influence extérieure, par comparaison avec les résultats de Wanders, qui avaient été obtenus dans le même cadre, mais au moyen de paramétrisations différentes. Nous avons alors pu conclure que ces effets semblaient peu importants à basse énergie.

Ceci apparaît cependant moins évident lorsque l'on demande à une même paramétrisation de couvrir un intervalle d'énergie s'étendant du seuil jusqu'à la position du méson  $\rho$ . On peut en effet constater par exemple que nos modèles d'ondes partielles ne dépendent pratiquement plus des variations de la discontinuité à travers la coupure de gauche, lorsque l'énergie est de l'ordre de 1 GeV. En ce sens des paramétrisations se comportant comme  $\frac{1}{\log s}$  seraient peut-être préférables<sup>(63)</sup>.

Nous l'avons aussi remarqué, l'existence d'une résonance semble très liée, dans notre méthode d'unitarisation, aux types de représentation choisis pour les fonctions  $N_{\ell}^I(s)$  et  $D_{\ell}^I(s)$ .

Malgré ces réserves, nos paramétrisations ont l'avantage de prédire de façon assez précise des ensembles de cinq déphasages



qui ne se trouvent pas en contradiction avec les conséquences rigoureuses actuellement connues de la théorie des champs et de l'unitarité.

De plus, au prix d'un apport phénoménologique minimum, l'existence du méson  $\rho$ , de position et de largeur données, nous sommes dans l'ensemble en accord avec les résultats expérimentaux actuels<sup>(14)</sup>. En ce sens, l'évolution générale des déphasages obtenus au cours du dernier chapitre constitue un élément très encourageant.

En effet, certains résultats restent stables et se précisent, comme l'onde  $S^0$ , alors que d'autres, comme l'onde  $S^2$ , épousent progressivement la tendance généralement suggérée. De plus, nous retrouvons ici certains éléments qui apparaissent dans d'autres contextes. Les paramètres du  $\sigma$  sont par exemple liés à ceux du  $\rho$  d'une façon tout à fait comparable à celle mise en évidence par K. Kang, M. Lacombe et R. Vinh Mau<sup>(66)</sup>. Bien que les ondes  $S$  n'aient pas exactement les longueurs de diffusion fournies par les algèbres de courant, elles possèdent très précisément les zéros prévus par S. Krinsky<sup>(63)</sup> à partir de cette théorie. Dans le même ordre d'idée, nous remarquerons que l'écart relatif entre la contribution des ondes  $S$  et  $P$  des voies croisées à la représentation de Froissart-Gribov de l'onde  $P$  et l'onde  $P$  elle-même n'excède pas 10 % sur la région non physique.

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à utiliser autant que possible les seuls résultats de la théorie des champs et de l'unitarité : ce faisant, nous avons simplement repris l'idée que, pour les ondes partielles, les singularités les plus proches sont dominantes. Au voisinage du seuil, comme nous l'avons vu, nous avons un moyen de paramétrer la coupure de gauche et la coupure unitaire. Lorsque nous avons voulu atteindre des énergies plus élevées, ceci nous a tout naturellement conduit à



introduire le pôle du  $\rho$ .

Bien entendu, cette approche peut être développée, puisque théoriquement nous pouvons représenter de plus en plus finement ces singularités. Il serait en particulier très satisfaisant de pouvoir préciser encore un peu mieux l'allure de l'onde S dans l'isospin  $^2$ .

En fait, ces contraintes ont maintenant, et de plus en plus, une autre utilisation que celle que nous venons de développer. Elles servent à préciser l'allure à basse énergie des ondes partielles obtenues par unitarisation de modèles fournis, par exemple, par les algèbres de courant<sup>(64)</sup> ou la représentation de Veneziano<sup>(65,66)</sup> de l'amplitude totale. Comme nous l'avons remarqué, certains des résultats fournis par ce type d'approche ne sont pas très différents des nôtres. Dans ce contexte, notre travail peut être interprété comme un indice de la part importante que prend, dans le résultat final, la présence de l'unitarité élastique associée aux contraintes issues de la théorie des champs.



## APPENDICE A

### Propriétés générales des ondes partielles.

Nous rassemblons ici les conséquences rigoureuses de la théorie axiomatique des champs et de l'unitarité que nous utilisons aux chapitres V et VI.

#### I - Analyticité.

Les ondes partielles ont été définies par

$$f_e(s) = \frac{2}{4-s} \int_0^{\frac{4-s}{2}} F(s, t, u) P_e\left(1 + \frac{2t}{s-4}\right) dt \quad (A.1)$$

Compte tenu du domaine d'holomorphie de l'amplitude, les ondes partielles apparaissent tout d'abord analytiques dans le disque  $|s-4| < 8$  muni d'une coupure "de gauche" pour  $s \leq 0$  et d'une coupure "de droite" pour  $s \geq 4$ , l'intervalle  $0 \leq s < 4$  constituant ce que nous appelons la région non physique.

En fait, ce disque peut être considérablement agrandi et la figure (2) représente le domaine d'analyticité D des ondes partielles dans son état actuel<sup>(7)</sup>. On peut remarquer en particulier que la coupure de droite reste bordée d'une région d'analyticité de largeur variable.

#### II - Unitarité.

Dans le cas neutre, le premier seuil d'inélasticité correspond à la production de quatre  $\pi^0$  et est situé au point  $s = 16$ .

Pour  $4 \leq s \leq 16$ , l'unitarité élastique s'écrit :

$$\text{Im} f_e(s) = \rho(s) |f_e(s)|^2 \quad \text{où} \quad \rho(s) = \sqrt{\frac{s-4}{s}}$$



Pour  $s \geq 16$ , nous avons simplement la condition

$$\operatorname{Im} f_e(s) \geq \rho(s) |f_e(s)|^2 \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

### III - Représentation de Froissart-Gribov.

Si dans l'expression (A.1) nous exprimons l'amplitude totale telle qu'elle est fournie par la relation de dispersion (II.20), nous obtenons la représentation de Froissart-Gribov des ondes partielles, c'est-à-dire :

$$\text{pour } \ell \geq 2, 0 \leq s < 4 : f_e(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty Q_\ell \left\{ \frac{2s'}{4-s} - 1 \right\} A(s', s) ds' \quad (\text{A.3})$$

On peut en déduire<sup>(38)</sup> le comportement normal au seuil

$$\lim_{s \rightarrow 4} \left\{ \frac{f_e(s)}{(s-4)^\ell} \right\} = a_\ell \quad (\text{A.4})$$

où  $a_\ell$  désigne la longueur de diffusion.

### IV - Contraintes géométriques de A. Martin.

Ces contraintes résultent de l'emploi simultané de l'analyticité, du croisement et de la positivité sous la forme (II.18).

On peut déjà constater que les ondes partielles pour  $\ell \geq 2$ , sont positives sur la région non physique : ceci provient de la positivité et de la représentation de Froissart-Gribov (A.3). Compte tenu de la symétrie de croisement, cette propriété n'est pas sans incidences sur l'onde S, comme l'indiquent les deux exemples suivants :



$$i) \quad F(s,0) = \sum_l (2l+1) f_l(s) \geq f_0(s) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq 4$$

$$\text{Mais} \quad F(4,0) - F(s,0) = \frac{s(4-s)}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{A(s',0)(2s'-4)}{s'(s'-4)(s'-s)(s'-4+s)}$$

$$\text{donc, pour } 0 \leq s \leq 4 : a_0 \geq F(s,0) \geq f_0(s)$$

$$ii) \text{ D'après (A.1), } f_0(0) = \frac{1}{2} \int_0^2 F(0,t) dt$$

$$\text{donc } f_0(0) > \frac{1}{2} \int_0^2 f_0(s) ds$$

De nombreuses inégalités de ce type ont été obtenues, notamment par A. Martin<sup>(38)</sup>, A.K. Common<sup>(39)</sup> et G. Auberson<sup>(40)</sup>. Nous citerons :

$$f_0(s) < a_0, \quad \text{pour } 0 \leq s < 4 \quad (C.1)$$

$$f_0(0) > \frac{1}{2} \int_2^4 f_0(s) ds \quad (C.2)$$

$$f_0(0) > f_0(3.189) \quad (C.3)$$

$$f_0(s) \text{ a un minimum unique entre } 1.127 \text{ et } 1.697 \quad (C.4)$$

$$\frac{df_0(s)}{ds} \leq 0 \quad 0 \leq s \leq 1.127$$

$$\frac{df_0(s)}{ds} > 0 \quad 1.697 \leq s < 4$$

Ces relations ont été utilisées par Wanders. On doit actuellement leur adjoindre l'ensemble complet mis en évidence par A. Martin.

En ce qui concerne l'onde S, nous pouvons citer<sup>(41)</sup>

$$f_0(3.205) > f_0(0.2134) \quad (C.5)$$

$$f_0(0.2134) > f_0(2.9863) \quad (C.6)$$



Les nombreuses inégalités liant les ondes S et D sont rassemblées dans les tableaux (I.a) et (II.a).

Il faut ajouter à cette liste, la borne absolue que nous avons pu obtenir au quatrième chapitre :

$$a_0 > -3.6 \quad . \quad (C.7)$$

#### V - Relations de croisement.

A la suite des travaux de A.P. Balachandran et J.Nuyts<sup>(42)</sup>, nous connaissons les implications de la symétrie de croisement sur les ondes partielles, et notamment pour la diffusion pion-pion, grâce à R. Roskies<sup>(16)</sup> et L. Basdevant, G. Cohen-Tannoudji et A. Morel<sup>(43)</sup>.

Dans le cas neutre, où  $F(s,t,u)$  est complètement symétrique, ces relations sont remarquablement simples.

Désignons par  $\Delta$  le triangle  $\{s,t,u > 0\}$  et définissons les quantités  $R_n$  par :

$$R_n = \int_{\Delta} F(s,t,u) R_n(s,t,u) dsdt \quad (A.5)$$

de telle sorte que :

$$R_n \equiv 0, \text{ lorsque } R_n(s,t,u) = -R_n(u,t,s) \quad .$$

En particulier, lorsque  $R_n(s,t,u)$  est un polynôme en  $s, t$  et  $u$ , on peut le développer selon :

$$R_n(s,t,u) = \sum_{\ell=0}^N r_n^{\ell}(s) P_{\ell}(\cos \theta_s) \quad (A.6)$$



et

$$R_n = \int_0^4 ds \sum_{\ell=0}^N r_n^\ell(s) \int_0^{4-s} F(s,t,u) P_\ell(\cos\theta_s) dt \quad (A.7)$$

Compte tenu de la définition des ondes partielles et de la symétrie  $u \leftrightarrow t$

$$\int_0^{4-s} F(s,t,u) P_\ell(\cos\theta_s) dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ell \text{ impair} \\ (4-s)f_\ell(s) & \text{pour } \ell \text{ pair} \end{cases} \quad (A.8)$$

En reportant l'expression (A.8) dans (A.7) nous obtenons les règles de somme :

$$R_n \equiv \int_0^4 (4-s) \sum_{\ell \text{ pair} \leq N} r_n^\ell(s) f_\ell(s) ds = 0 \quad (A.9)$$

En augmentant le degré de  $R_n(s,t,u)$  on peut obtenir une infinité de telles relations, qui forment un ensemble complet et qui à chaque fois, ne contiennent qu'un nombre fini d'ondes partielles.

Puisque nous ne désirons faire intervenir que les ondes S et D nous ne devons considérer que les polynômes  $R_n(s,t,u)$  du troisième degré en t et u au plus. Nous retiendrons :

$$\begin{aligned} &(s-u) \\ &(s-u)t, (s-u)t^2 \\ &(s-u)su, (s-u)s^2u^2, (s-u)stu, \end{aligned}$$

qui, d'après (A.9), fournissent les relations (A.10) :

$$R_0 \equiv \int_0^4 (3s-4)(4-s)f_0(s)ds = 0$$



$$R_1 \equiv \int_0^4 (4-s)^2 \{4(s-1)f_0(s) + (4-s)f_2(s)\} ds = 0$$

$$R_2 \equiv \int_0^4 (4-s)^3 \{(5s-4)f_0(s) + (s+4)f_2(s)\} ds = 0$$

$$R_3 \equiv \int_0^4 s(4-s)^2 \{(5s-8)f_0(s) - (4-s)f_2(s)\} ds = 0$$

$$R_4 \equiv \int_0^4 s^2(4-s)^3 \{(7s-12)f_0(s) + (5s-12)f_2(s)\} ds = 0$$

$$R_5 \equiv \int_0^4 s(4-s)^3 (3s-4) \{f_0(s) - f_2(s)\} ds = 0$$

# VI - Discontinuité des ondes partielles à travers la coupure de gauche.

On sait que, dans le cadre de la méthode N/D, cette discontinuité joue le rôle d'un potentiel et détermine l'onde partielle (en l'absence de C.D.D. ambiguïté). Les propriétés que nous allons démontrer sont donc, pour nous, très importantes et sont à la base même de notre paramétrisation de la contribution de cette coupure.

Rappelons que les ondes partielles  $f_\ell(s)$  sont données par

$$f_\ell(s) = \frac{2}{4-s} \int_0^{\frac{4-s}{2}} F(s,t,u) P_\ell\left(1 + \frac{2t}{s-4}\right) dt$$

Fixons  $s$  en un point  $s=s+i\varepsilon$ ,  $-4 < s \leq 0$ . L'amplitude étant réelle dans le triangle  $\{s,t,u \leq 4\}$ , nous obtenons

$$\text{Im} f_\ell(s) = \frac{2}{4-s} \int_0^{-s} A(s+i\varepsilon,t) P_\ell\left(1 + \frac{2t}{s-4}\right) dt$$



c'est-à-dire, par symétrie  $s \rightarrow u$

$$\text{Im} f_\ell(s) = \frac{-2}{4-s} \int_4^{4-s} A(u+i\epsilon, t) P_\ell\left(1 + \frac{2u}{s-4}\right) du \quad (\text{A.11})$$

Dans cette expression  $\begin{cases} 0 \leq t < 4 \\ 4 \leq u \leq 4-s < 8 \end{cases}$ . Nous pouvons donc développer la partie absorptive sur les ondes partielles de la voie  $u$  :

$$A(u+i\epsilon, t) = \sum_\ell (2\ell+1) \text{Im} f_\ell(u) P_\ell\left(1 + \frac{2s}{u-4}\right) \quad (\text{A.12})$$

où l'onde  $S$  domine, compte tenu du comportement normal au seuil et de l'unitarité élastique. En effet, en désignant par  $\tilde{f}_\ell(u)$  l'onde partielle réduite ( $\tilde{f}_\ell(4) = a_\ell$ )

$$f_\ell(u) = (u-4)^\ell \tilde{f}_\ell(u)$$

$$\text{Im} f_\ell(u) = g(u) |f_\ell(u)|^2 \simeq \sqrt{u-4} (u-4)^{2\ell} \frac{a_\ell^2}{2}$$

Par conséquent,

$$A(u+i\epsilon, t) = \text{Im} f_0(u) + O[(u-4)^{9/2}] \quad (\text{A.13})$$

En nous servant de (A.13), nous pouvons développer l'intégrand de (A.11) et,  $s$  tendant vers zéro, intégrer cette série terme à terme : nous obtenons le développement de  $\text{Im} f_\ell(s)$  en puissances de  $\sqrt{s}$ , au voisinage de  $s=0$ , qui jusqu'au terme  $s^4 \sqrt{s}$ , ne dépend que de l'onde  $S$ . Plus précisément, en définissant les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  par

$$|f_0(s)|^2 = a_0^2 + A(s-4) + B(s-4)^2 + C(s-4)^3 + O[(s-4)^4] \quad (\text{A.14})$$



nous obtenons les relations (A.15)

$$\text{Imf}_0(s) = I_3 x^3 + I_5 x^5 + I_7 x^7 + I_9 x^9 + O(x^{11})$$

$$\text{Imf}_2(s) = J_3 x^3 + J_5 x^5 + J_7 x^7 + J_9 x^9 + O(x^{11})$$

où  $x = \frac{\sqrt{s}}{2}$  (coupé pour  $s < 0$ ), avec

$$I_3 = 4a_0^2/3 \quad (\text{S.a})$$

$$I_5 = 26a_0^2/15 - 16A/5 \quad (\text{S.b})$$

$$I_7 = 409a_0^2/210 - 152A/35 + 64B/7 \quad (\text{S.c})$$

$$I_9 = 2629a_0^2/1260 - 526A/105 + 800B/63 - 256C/9 \quad (\text{S.d})$$

$$J_3 = 4a_0^2/3 \quad (\text{D.a})$$

$$J_5 = 206a_0^2/15 - 16A/5 \quad (\text{D.b})$$

$$J_7 = 607a_0^2/30 - 344A/35 + 64B/7 \quad (\text{D.c})$$

$$J_9 = 5131a_0^2/180 - 698A/35 + 224B/9 - 256C/9 \quad (\text{D.d})$$

Nous ferons donc les remarques suivantes :

i)  $\text{Imf}_\ell(s)$  se comporte à l'origine non pas comme  $\sqrt{s}$ , mais comme  $s\sqrt{s}$ .

ii) Le coefficient de ce terme est fonction uniquement de la longueur de diffusion.

iii) Les quatre premiers termes de  $\text{Imf}_\ell(s)$ , quelque soit  $\ell$ , ne dépendent que de la onde  $S$ .



## APPENDICE B

### Contraintes liant les ondes partielles

#### S, P et D.

Comme nous venons de le voir dans l'appendice A pour le cas neutre, les contraintes auxquelles sont soumises les ondes partielles sont essentiellement de trois sortes. Nous voulons maintenant rappeler que chacune des méthodes précédentes, appliquée à des combinaisons appropriées de spin isotopique, fournit un ensemble de relations entre les ondes S, P et D.

#### I - Les contraintes issues de l'alliance croisement-positivité.

Nous remarquerons pour commencer que les contraintes répertoriées en appendice A, dans les tableaux (I-a) et (II-a), s'appliquent non seulement au cas neutre, mais aussi à la combinaison  $f_0^0(s) + 2f_0^2(s)$  qui possède les propriétés de positivité requises. Il en est de même de celles fournies par F.F.K. Cheung<sup>(57)</sup> et G. Auberson<sup>(40)</sup>.

La généralisation de ce type de relations a pu être effectuée par G. Auberson, O. Brander, G. Mahoux et A. Martin<sup>(58)</sup>, à partir des combinaisons linéaires les plus générales de spin isotopique conservant la positivité.

Les contraintes obtenues, liant les deux ondes S à l'onde P sur le domaine non physique, sont répertoriées dans les tableaux (IV-a), (IV-b), (V-a) et (V-b).

#### II - Les contraintes issues du croisement.

En ce cas, le passage du cas neutre au cas réel est



immédiat : il suffit de construire des combinaisons linéaires des trois amplitudes qui soient symétriques ou antisymétriques, à  $t$  fixé, pour l'échange  $s \leftrightarrow u$ . Compte tenu des relations de croisement (II-4,5,6), on peut vérifier que les combinaisons

$$\begin{aligned} B_0 &= F^0(s,t,u) + 2F^2(s,t,u) \\ B_1 &= 2F^0(s,t,u) + 3F^1(s,t,u) - 5F^2(s,t,u) \\ B_2 &= 2F^0(s,t,u) - 9F^1(s,t,u) - 5F^2(s,t,u) \end{aligned}$$

sont symétriques ( $B_0$  et  $B_2$ ) ou antisymétriques ( $B_1$ ). En leur appliquant les méthodes exposées en appendice, on peut obtenir des règles de somme du type :

$$R_n \equiv \int_0^4 \sum_{\ell, I} \alpha_{\ell, n}^I(s) f_{\ell}^I(s) ds = 0$$

En fait, pour minimiser les erreurs dues au calcul numérique<sup>(59)</sup>, nous préférons la méthode de R. Roskies<sup>(16)</sup> qui permet d'exprimer les poids  $\alpha_{\ell, n}^I(s)$  au moyen de polynômes orthogonaux sur le domaine non physique.

Nous obtenons deux relations pour les ondes S, cinq pour le système S et P, quinze pour l'ensemble S, P et D, répertoriées respectivement dans les tableaux (VII-a), (VII-b) et (VII-c).

### III - Comportement de $\text{Im}f_{\ell}^I(s)$ au voisinage de $s=0$ .

Ici aussi, les méthodes de l'appendice A peuvent être immédiatement généralisées en utilisant la matrice de croisement (II.4). Nous obtenons :

$$\text{Im}f_{\ell}^I(s) = I_3^I x^3 + I_5^I x^5 + I_7^I x^7 + I_9^I x^9 + O(x^{11}) ,$$



où  $x = \sqrt{s/2}$ , les coefficients  $I_n^I$  étant donnés par :

- pour les ondes S ;  $I=0$  et 2 ;

$$I_3^I = 4a'_I/3 \quad (S-\alpha)$$

$$I_5^I = 26a'_I/15 - 16A'_I/5 \quad (S-\beta)$$

$$I_7^I = 409a'_I/210 - 152A'_I/35 + 64B'_I/7 + 1728c_I^I a_1^2/35 \quad (S-\gamma)$$

$$I_9^I = 2629a'_I/1260 - 526A'_I/105 + 800B'_I/63 - 256C'_I/9 + 992c_I^I a_1^2/15 - 2816C_I^I A_1/21 \quad (S-\delta)$$

- pour l'onde P ;  $I=1$  ;

$$I_3^1 = 4a'_1/3 \quad (P-\alpha)$$

$$I_5^1 = 14a'_1/5 - 16A'_1/5 \quad (P-\beta)$$

$$I_7^1 = 181a'_1/42 - 216A'_1/35 + 64B'_1/7 + 864a_1^2/35 \quad (P-\gamma)$$

$$I_9^1 = 1051a'_1/180 - 578A'_1/63 + 352B'_1/21 - 256C'_1/9 - 1408A_1/21 + 1712a_1^2/35 \quad (P-\delta)$$

avec, pour  $I=0,1$  et 2 :

$$a'_I = c_0^I a_0^2 + c_2^I a_2^2$$

$$A'_I = c_0^I A_0 + c_2^I A_2$$

$$B'_I = c_0^I B_0 + c_2^I B_2$$

$$C'_I = c_0^I C_0 + c_2^I C_2 \text{ et}$$

$$|f_0^I(s)|^2 = a_I^2 + (s-4)A_I + (s-4)^2 B_I + (s-4)^3 C_I + O[(s-4)^4]$$

$$|f_1^1(s)|^2 = (s-4)^2 [a_1^2 + A_1(s-4)] + O[(s-4)^4]$$



## APPENDICE C

### Paramétrisation de la coupure de gauche.

Le but de cet appendice est de fournir l'expression des coefficients qui paramétrisent la contribution de la coupure de gauche. A titre d'exemple, nous explicitons ce calcul :

i) pour l'onde S du cas neutre.

ii) pour les ondes S et P du cas chargé, avec les modèles proposés au dernier paragraphe du chapitre VI.

#### I - Onde S dans le cas neutre.

L'expression (V.2) peut s'écrire :

$$f_o(s) = D_o^{-1}(s) \quad (C.1)$$

$$D_o(s) = z + \frac{s}{4} (a-z) + s\{A_2 w_2(s) + A_4 w_4(s)\} + g_o(s)$$

ce qui fournit, pour  $s \leq 0$ ,

$$\text{Im}f_o(s) = - \text{Im}D_o(s) \{\text{Re}D_o(s)\}^{-2} \quad (C.2)$$

puisque d'après (S-a) ,  $\text{Im}f_o(s) \approx \text{Im}D_o(s) \approx x^3$  ,  $(x = \frac{\sqrt{s}}{2})$  .

On peut tirer de (C.1) les expressions de  $\text{Im}D_o(s)$  et de  $\text{Re}D_o(s)$  :

$$\text{Im}D_o(s) = w_3^2 A_2 x^3 + \{w_5^2 A_2 + w_5^4 A_4\} x^5 + O(x^7) \quad (C.3)$$



$$\{\text{Re}D_0(s)\}^{-2} = z_0^2 - 2z_0^3 \{a-z+e_2+\pi^2 A_2 - \frac{\pi^4}{4} A_4\} x^2 + O(x^4) \quad (\text{C.4})$$

où nous avons défini les constantes  $e_2$  et  $w_P^N$  par :

$$g_0(s) = e_2 x^2 + O(x^4)$$

$$\text{Im} \{s w_N(s)\} = \sum_P w_P^N x^P \quad (\text{cf. Tableau III}).$$

En reportant dans (C.2) les expressions (C.3) et (C.4) pour  $\text{Im}D_0(s)$  et  $\{\text{Re}D_0(s)\}^{-2}$ , nous obtenons une série en  $x$  que nous pouvons identifier à celle fournie par les relations (S-a) et (S-b) de l'appendice A :

$$- z_0^2 w_3^2 A_2 = I_3 \quad (\text{C.5})$$

$$2z_0^3 w_3^2 (a-z+e_2+\pi^2 A_2 - \frac{\pi^4}{4} A_4) - z_0^2 (w_5^2 A_2 + w_5^4 A_4) = I_5 \quad (\text{C.6})$$

L'équation (C.5) fournit  $A_2$ . Nous tirerons  $A_4$  de (C.6) après avoir explicité le coefficient  $A = \frac{d}{ds} \left\{ |f_0(s)|^2 \right\} \Big|_{s=4}$

intervenant dans  $I_5$  :

$$A = \lambda + \mu A_4 \quad (\text{C.7})$$

$$\lambda = -a_0^3 \left( \frac{a_0}{4} + 2d_1 + \frac{a-z}{2} + v_1^2 A_2 \right)$$

$$\mu = -2a_0^3 v_1^4$$

$d_1$ ,  $v_1^2$  et  $v_1^4$  étant les constantes définies par :

$$\text{Reg}_0(s) = d_1(s-4) + O[(s-4)^2] \quad (\text{C.8})$$



$$sw_N(s) = v_1^N (s-4) + 0 \left[ (s-4)^2 \right]$$

$I_5$  peut alors s'écrire :

$$I_5 = \tilde{I}_5 - \frac{16}{5} \mu A_4, \text{ avec}$$

$$\tilde{I}_5 = \frac{26}{15} a_0^2 - \frac{16}{5} \lambda \quad (C.9)$$

En reportant cette valeur dans (C.6), nous obtenons  $A_4$  :

$$\begin{aligned} A_4 &= A_4^N / A_4^D \\ A_4^N &= \tilde{I}_5 + w_5^2 z_0^2 A_2 + 2z_0^3 w_3^2 A_2 \quad (\tilde{a} - z + e_2 + \pi^2 A_2) \\ A_4^D &= \frac{\pi^4}{2} z_0^3 w_3^2 A_2 - w_5^4 z_0^2 \end{aligned} \quad (C.10)$$

## II - Paramétrisation de la coupure de gauche des ondes S et P.

Bien qu'elle soit d'une écriture plus compliquée, la méthode que nous suivons dans ce cas est tout à fait comparable à celle que nous venons d'exposer.

Les paramétrisations que nous avons choisies sont :

$$f_e^I(s) = \frac{N_e^I(s)}{1 + N_e^I(s) D_e^I(s)} \quad \text{avec} \quad (C.11)$$

$$N_0^I(s) = z_I + \frac{s}{4} (\tilde{a}_I - z_I) + s(s-4) \left\{ A_0^I + A_2^I w_2 + A_4^I w_4 + A_6^I w_6 + A_8^I w_8 \right\}$$

$$N_1^I(s) = (s-4) \left\{ \frac{s}{4} a_1 + \frac{(s-4)}{16} z_1 \right\} + s(s-4) \left\{ A_2^1 w_2 + A_4^1 w_4 + A_6^1 w_6 + A_8^1 w_8 \right\}$$



Par conséquent, pour  $s \leq 0$ ,

$$\frac{\operatorname{Im} f_e^{\mathbb{I}}(s)}{|f_e^{\mathbb{I}}(s)|^2} = \frac{\operatorname{Im} N_e^{\mathbb{I}}(s)}{|N_e^{\mathbb{I}}(s)|^2}$$

et comme  $\mathcal{D}_e^{\mathbb{I}}(s) = e_0 x^4 + e_1 x^6 + O(x^8)$  avec

$$e_0 = -4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{s_{\mathbb{I}}}\right)/3\pi \quad e_1 = -16/105\pi$$

$$\operatorname{Im} N_e^{\mathbb{I}}(s) = \operatorname{Im} f_e^{\mathbb{I}}(s) + O(x^7) \quad (\text{C.12})$$

soit, plus exactement :

$$\operatorname{Im} N_e^{\mathbb{I}}(s) = \operatorname{Im} f_e^{\mathbb{I}}(s) \left\{ 1 + \mathcal{D}_e^{\mathbb{I}}(s) \operatorname{Re} N_e^{\mathbb{I}}(s) \right\}^2 + O(x^7) \quad (\text{C.13})$$

A partir des expressions (C.11) on peut calculer  $\operatorname{Im} N_{\ell}^{\mathbb{I}}(s)$  et  $\operatorname{Re} N_{\ell}^{\mathbb{I}}(s)$  :

$$\operatorname{Im} N_e^{\mathbb{I}}(s) = s(s-4) \operatorname{Im} \left\{ A_2^{\mathbb{I}} w_2 + A_4^{\mathbb{I}} w_4 + A_6^{\mathbb{I}} w_6 + A_8^{\mathbb{I}} w_8 \right\}$$

soit

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} N_e^{\mathbb{I}}(s) = 16\pi \left\{ A_2^{\mathbb{I}} x^3 + \left( 2A_4^{\mathbb{I}} - \frac{5}{6} A_2^{\mathbb{I}} \right) x^5 + \left( 3A_6^{\mathbb{I}} - A_4^{\mathbb{I}} - \frac{11A_2^{\mathbb{I}}}{120} \right) x^7 \right. \\ \left. + \left( 4A_8^{\mathbb{I}} - \frac{A_6^{\mathbb{I}}}{2} - \frac{23A_4^{\mathbb{I}}}{60} - \frac{17A_2^{\mathbb{I}}}{560} \right) x^9 \right\} + O(x^{11}) \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

$$\left\{ 1 + \mathcal{D}_e^{\mathbb{I}}(s) \operatorname{Re} N_e^{\mathbb{I}}(s) \right\}^2 =$$

$$1 + 2e_0 z_{\mathbb{I}} x^4 + 2x^6 \left\{ e_2^{\mathbb{I}} - \frac{3\pi^6}{4} e_0 A_6^{\mathbb{I}} - \frac{17\pi^8}{16} e_0 A_8^{\mathbb{I}} \right\} + O(x^8) \quad (\text{C.15})$$

Avec



$$e_2^I = e_1 z_I + e_0 (\tilde{a}_I - z_I - 16 A_0^I - 4 \pi^2 A_2^I + \pi^4 A_4^I) \quad \text{pour } I=0 \text{ et } 2$$

$$e_2^1 = z_1 (e_1 - 2e_0) - 4a_1 - 4\pi^2 A_2^1 + \pi^4 A_4^1 \quad \text{pour } I=1.$$

En reportant dans (C.13)  $\text{Im} N_\ell^I(s)$  donné par (C.14),  $\{1 + D_\ell^I(s) R_\ell N_\ell^I(s)\}^2$  donné par (C.15),  $\text{Im} f_\ell^I(s)$  donné par les expressions de l'appendice B, et en identifiant les deux membres en  $x$ , nous obtenons le système :

$$16\pi A_2^I = I_3^I \quad (I=0, 1 \text{ et } 2) \quad (\text{C.16})$$

$$16\pi \left\{ -\frac{5A_2^I}{6} + 2A_4^I \right\} = I_5^I \quad (\text{C.17})$$

$$16\pi \left\{ -\frac{11}{120} A_2^I - A_4^I + 3A_6^I \right\} = I_7^I + 2e_0 z_I I_3^I \quad (\text{C.18})$$

$$16\pi \left\{ -\frac{17A_2^I}{560} - \frac{23A_4^I}{60} - \frac{A_6^I}{2} + 4A_8^I \right\} = I_9^I + 2e_0 z_I I_5^I \quad (\text{C.19})$$

$$+ 2I_3^I \left\{ e_2^I - \frac{2\pi^6}{4} e_0 A_6^I - \frac{17}{16} \pi^8 e_0 A_8^I \right\}$$

Avant de résoudre ce système, nous devons exprimer en fonction des  $A_n^I$  les coefficients  $A_I^1$ ,  $B_I^1$ ,  $C_I^1$  et  $A_1$  qui interviennent dans  $I_5^I$ ,  $I_7^I$  et  $I_9^I$ . (Cf. appendice B).

Ces coefficients ont été définis par :

$$|f_0^I(s)|^2 = a_I^2 + A_I(s-4) + B_I(s-4)^2 + C_I(s-4)^3 + O[(s-4)^4] \quad (\text{C.20})$$

$$|f_1^I(s)|^2 = (s-4)^2 \{ a_1^2 + A_1(s-4) \} + O[(s-4)^4] \quad (\text{C.21})$$

$$\{A_I^1, B_I^1, C_I^1\} = C_0^I \{A_0, B_0, C_0\} + C_2^I \{A_2, B_2, C_2\} \quad I=0, 1, 2.$$

Nous les calculons à partir de l'expression (C.11). Il apparaît



d'abord que :

$$A'_I = A'_I(a_J, z_J, A_0^J) \quad \begin{matrix} I=0,1,2 \\ J=0,2 \end{matrix} \quad (C.22)$$

Les équations (C.16) et (C.17) permettent donc de calculer immédiatement  $A_2^I$  et  $A_4^I$  dans tous les isospins :

$$A_2^I = I_3^I / 16\pi \quad (C.23)$$

$$A_4^I = I_5^I / 32\pi + 5A_2^I / 12 \quad (C.24)$$

Ces coefficients étant connus, nous n'explicitons dans ce qui suit que la dépendance en  $A_n^I$ ,  $n \geq 6$ . En particulier,  $B_I^I$ ,  $C_I^I$  et  $A_1$  sont de la forme :

$$B_I^I = g_0^I + g_1^I A_6^0 + g_2^I A_6^2 + g_3^I A_8^0 + g_4^I A_8^2 \quad (C.25)$$

$$C_I^I = g_5^I + g_6^I A_6^0 + g_7^I A_6^2 + g_8^I A_8^0 + g_9^I A_8^2 \quad (C.26)$$

$$A_1 = z_1 \frac{a_1}{8} + g_{10} + g_{11} A_6^1 + g_{12} A_8^1 \quad (C.27)$$

Nous pouvons maintenant résoudre les équations (C.18). Pour  $I=0$  et 2, elles permettent d'exprimer  $A_6^I$  en fonction de  $A_8^0$  et  $A_8^2$  :

$$A_6^I = \alpha_0^I + \alpha_1^I A_8^0 + \alpha_2^I A_8^2 \quad (C.28)$$

En reportant (C.28) dans les expressions (C.25) et (C.26), il vient

$$B_I^I = \alpha_3^I + \alpha_4^I A_8^0 + \alpha_5^I A_8^2 \quad (C.29)$$

$$C_I^I = \alpha_6^I + \alpha_7^I A_8^0 + \alpha_8^I A_8^2 \quad (C.30)$$



L'équation (C.18), dans l'isospin 1, permet alors d'écrire :

$$A_6^1 = \alpha_9 + 2e_0 I_3^1 z_1 + \alpha_{10} A_8^0 + \alpha_{11} A_8^2 \quad (C.31)$$

Reportons cette valeur de  $A_6^1$  dans (C.27) :

$$A_1 = \alpha_{12} z_1 + \alpha_{13} A_8^1 + \alpha_{14} A_8^0 + \alpha_{15} A_8^2 \quad (C.32)$$

L'équation (C.29) dans l'isospin 1 permet alors d'éliminer  $A_8^1$  :

$$A_8^1 = \beta_4 + \beta_5 z_1 + \beta_6 A_8^0 + \beta_7 A_8^2 \quad (C.33)$$

où la dépendance en  $z_1$  est explicite ; ceci va nous servir à son élimination, effectuée en imposant un pôle dans l'onde P au point  $s=s_P$  :

$$1 + N_1^1(s_P) \operatorname{Re} D_1^1(s_P) = 0 \quad (C.34)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{s_P}{4} a_1 + s_P \{ A_2^1 w_2(s_P) + A_4^1 w_4(s_P) + A_6^1 w_6(s_P) + A_8^1 w_8(s_P) \} = \\ \frac{4-s_P}{16} z_1 + \{ (4-s_P) \operatorname{Re} D_1^1(s_P) \}^{-1} \end{aligned} \quad (C.35)$$

En remplaçant dans cette équation  $A_6^1$  et  $A_8^1$  par leurs expressions (C.31) et (C.33), on peut aboutir à :

$$z_1 = \gamma_0 + \gamma_1 A_8^0 + \gamma_2 A_8^2 \quad (C.36)$$

(C.32) devient alors :

$$A_1 = \gamma_3 + \gamma_4 A_8^0 + \gamma_5 A_8^2 \quad (C.37)$$



Nous sommes alors en mesure de résoudre les équations (C.19) dans les isospins 0 et 2.  $I_9^I$  peut s'écrire :

$$I_9^I = \tilde{I}_9^I + \gamma_6^I A_8^0 + \gamma_7^I A_8^2 \quad (C.38)$$

et nous obtenons le système :

$$\begin{aligned} \mu_0^0 A_8^0 + \mu_2^0 A_8^2 &= \mu^0 \\ \mu_0^2 A_8^0 + \mu_2^2 A_8^2 &= \mu^2 \end{aligned} \quad (C.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_0^I &= \alpha_1^I \left\{ \frac{3\pi^0}{2} e_0 I_3^I - 8\pi \right\} - \gamma_6^I + \delta_0^I \left\{ 64\pi + \frac{17}{8} \pi^8 e_0 I_3^I \right\} \\ \mu_2^I &= \alpha_2^I \left\{ \frac{3\pi^0}{2} e_0 I_3^I - 8\pi \right\} - \gamma_7^I + \delta_2^I \left\{ 64\pi + \frac{17}{8} \pi^8 e_0 I_3^I \right\} \\ \mu^I &= 16\pi \left\{ \frac{17 A_2^I}{560} + \frac{23 A_4^I}{60} \right\} + \tilde{I}_9^I + 2e_0 z_I I_5^I + 2e_2^I I_3^I \\ &\quad - \alpha_0^I \left\{ \frac{3\pi^0}{2} e_0 I_3^I - 8\pi \right\} \end{aligned}$$

Le système (C.39) fournit  $A_8^0$  et  $A_8^2$ . En portant ces valeurs dans (C.36) nous obtenons  $z_1$ , puis  $A_8^1$  et  $A_6^1$ , et par (C.28),  $A_6^0$  et  $A_6^2$ , ce qui achève la détermination de tous ces coefficients en fonction de  $a_I$ ,  $z_I$ ,  $A_0^I$  et  $s_I$ .



# R E F E R E N C E S

- 1 - M.L. Goldberger : Phys. Rev., 99, 979, (1955).
- 2 - G.F. Chew : S-Matrix Theory of Strong Interactions. Benjamin, New-York, (1961).
- 3 - G.F. Chew et S. Mandelstam : Phys. Rev., 119, 467, (1960).
- 4 - E.P. Wigner : Phys. Rev., 98, 145, (1955).
- 5 - C.J. Goebel, R. Karplus et M.A. Ruderman : Phys. Rev., 100, 240, (1955).
- 6 - H. Lehmann : Nuovo Cimento, 10, 579, (1958).
- 7 - A. Martin : Nuovo Cimento, 42, 930, (1966).  
Nuovo Cimento, 44, 1218, (1966).
- 8 - B. Bonnier et R. Vinh Mau : Phys. Lett., 24B, 9, (1967).  
Phys. Rev., 165, 1923, (1968).
- 9 - L. Lukaszuk et A. Martin : Nuovo Cimento, 52, 122, (1967).
- 10 - A.K. Common : Nuovo Cimento, 63, 451, (1969).
- 11 - A.M. Bincer et B. Sakita : Phys. Rev., 129, 1905, (1963).
- 12 - A. Martin : Nuovo Cimento, 61, 56, (1969).
- 13 - F.J. Yndurain : Phys. Lett., 29, 125, (1969).
- 14 - Proceedings of the Conference on  $\pi\pi$  and  $K\pi$  interactions. Argonne National Laboratory, (1969).
- 15 - A. Martin : Nuovo Cimento, 58, 303, (1968).  
Nuovo Cimento, 63, 167, (1969).
- 16 - R. Roskies : Nuovo Cimento, 65, 467, (1970).
- 17 - B. Bonnier : Nucl. Phys., B17, 525, (1970).
- 18 - O. Piguet et G. Wanders : Nuovo Cimento, 56, 417, (1969).  
G. Auberson, O. Piguet et G. Wanders : Phys. Lett., 28B, 141, (1968).



- 19 - D. Atkinson : Nucl. Phys., B7, 375, (1968).  
Nucl. Phys., B8, 377, (1968).
- 20 - B. Bonnier : Nucl. Phys., B10, 467, (1969).  
B. Bonnier et P. Gauron : Nucl. Phys., B21, 465, (1970).
- 21 - J.E. Bowcock et G. John : Nucl. Phys., B11, 659, (1969).  
R. Vinh Mau : Compte rendu des journées d'études d'Aussois de la division de Physique Théorique d'Orsay, 257, (1970).
- 22 - J. Bross, H. Epstein et V. Glaser : Nuovo Cimento, 31, 1265, (1964).
- 23 - A. Martin : Preprint CERN TH.992, (1969).
- 24 - K. Symanzik : Phys. Rev., 100, 743, (1957).
- 25 - N.N. Bogoliukov : Voprossy Teorü Dispersionnykt Sootnoskenü. Moscou, (1958).
- 26 - H. Epstein, V. Glaser et A. Martin : Preprint CERN TH 991, (1969).
- 27 - A. Jaffé : Conférence de Berkeley sur les particules élémentaires, (1966).
- 28 - A. Martin : Scattering Theory ; Unitarity, Analyticity and Crossing. Lectures notes in Physics. Springer Verlag, Heidelberg, (1969).
- 29 - G. Mahoux : Thèse, Paris, (1969).
- 30 - J. Bros, H. Epstein et V. Glaser : Comm. Math, Phys., 1, 240, (1965).
- 31 - M. Froissart : Phys. Rev., 123, 1053, (1961).  
O.W. Greenberg et F.E. Low : Phys. Rev., 124, 2047, (1961).  
A. Martin : Phys. Rev., 129, 1432, (1963).
- 32 - S.D. Drell, A.C. Finn et A.C. Hearn : Phys. Rev., 136, 1451, (1964).
- 33 - A. Martin : Nuovo Cimento, 44, 1218, (1966).
- 34 - R.P. Boas : Entire Functions, 2, ch. IV. Academic Press Inc., New York, (1954).
- 35 - C.J. Goebel et G. Shaw : Phys. Lett., 27B, 291, (1968).
- 36 - R. Wit : Preprint CERN TH.1144 et TH.1182, (1970).  
A.K. Common et R. Wit : Preprint CERN TH.1217, (1970).



- 37 - Y.S. Jin et A. Martin : Phys. Rev.,135,1375,(1964).
- 38 - A. Martin : Nuovo Cimento,47,265,(1967).
- 39 - A.K. Common : Nuovo Cimento,53,946,(1968).
- 40 - G. Auberson : Nuovo Cimento,68,281,(1970).
- 41 - A. Martin : Nuovo Cimento,58,303,(1968).
- 42 - A.P. Balachandran et J. Nuyts : Phys. Rev.,172,1821,(1968).
- 43 - J.L. Basdevant, G. Cohen-Tannoudji et A. Morel : Nuovo Cimento,  
64, 585,(1969).
- 44 - Y.S. Jin et K. Kang : Phys. Rev.,152,1277,(1966).
- 45 - A.K. Common : Nuovo Cimento,63,863,(1969).
- 46 - M.R. Pennington : Westfield College Preprint,(1970).
- 47 - A.K. Common : Nuovo Cimento,65,581,(1970).  
Nuovo Cimento,63,863,(1969).
- 48 - F.J. Yndurain : Nuovo Cimento,64,225,(1969).
- 49 - B. Bonnier et P. Gauron : à paraître.
- 50 - G.E. Kalmus : Rapporteur à la conférence d'Argonne.(1969).
- 51 - J.E. Augustin et al. : Phys. Lett.,28B,508,(1969).
- 52 - J.P. Baton, G. Laurens et J. Reigner : Nucl. Phys.,B3,349,(1967).  
Preprint de Vrije Universiteit Brussel, Belgium,(1970).  
S. Marateck et al. : Phys. Rev. Lett.,21,1613,(1968).  
J.H. Scharenguivel et al. : Phys. Rev.,186,1387,(1969).  
W.D. Walker et al. : Phys. Rev. Lett.,18,630,(1967).
- 53 - G.F. Chew et F.E. Low : Phys. Rev.,113,1640,(1959).
- 54 - R.E. Cutkosky et B.B. Deo : Phys. Rev.,174,1859,(1968).  
S. Ciulli : Nuovo Cimento,61A,787,(1969).  
Nuovo Cimento,62A,301,(1969).  
J. Pisut et P. Presnajder : Nucl. Phys. B12,110,(1969).
- 55 - J. Pisut : CERN/TH-1171 - (1970).



- 56 - E. Malamud et P.E. Schlein ; Phys. Rev. Lett.,19,1056,(1967).
- 57 - F.F.K.Cheung ; Phys. Rev.,186,1726,(1969).  
F.F.K. Cheung et F.S. Chen Cheung : Nuovo Cimento,55A,537,(1970).  
S.M. Roy ; Phys. Rev. Lett.,20,1016,(1968).
- 58 - G. Auberson, O. Brander, G. Mahoux et A. Martin : Nuovo Cimento,  
65A,743,(1970).
- 59 - Le Guilloux et A. Morel : Communication privée.
- 60 - G.W. Ellison et S. Humble : Phys. Rev.,173,1563,(1968).  
N.G. Antoniou et C.H.L. Smith : Nucl. Phys.,B3,277,(1967).  
J. Pisut : Nucl. Phys.,B8,159,(1968).
- 61 - G.J. Gounaris et J.J. Sakurai : Phys. Rev. Lett.,21,244,(1968).
- 62 - L.S. Brown et R.L. Goble : Phys. Rev. Lett.,20,346,(1968).  
R.H. Graham et R.C. Johnson : Phys. Rev.,188,2362,(1970).
- 63 - S. Krinsky : Phys. Rev.,D2,1168,(1970).
- 64 - H.J. Schnitzer : Phys. Rev.,D2,1620,(1970).  
S. Krinsby : Ref. 63  
R.H. Graham et R.C. Johnson : Ref.62.
- 65 - R. Baier, H. Kühnelt, F. Widder : Lettere Al Nuovo Cimento,III,  
59,(1970).  
F. Arbab, J.T. Donohue : Phys. Rev., D1.1,217,(1970).
- 66 - K. Kang, M. Lacombe, R. Vinh Mau ; à paraitre.



# LEGENDE DES TABLEAUX

- Tableaux I-A et II-A : Contraintes<sup>(15)</sup> s'exerçant entre les ondes S et D de la combinaison neutre.
  
- Tableaux I-B et II-B : Résultats numériques correspondant aux contraintes I-A et II-A fournis par les modèles d'ondes S et D du chapitre V.
  
- Tableau III : Expression et principales caractéristiques des polynômes  $w_N(v^2)$  utilisés au cours de la seconde partie.
  
- Tableaux IV-A et IV-B  
    V-A et V-B: Contraintes<sup>(58)</sup> s'exerçant entre les ondes S et P.
  
- Tableaux IV-C et IV-D  
    V-C et V-D  
    VI-A et VI-B: Résultats numériques correspondant respectivement aux contraintes IV-A, IV-B, V-A, V-B, I-A et II-A, fournis par les modèles d'ondes partielles S, P et D obtenus au dernier paragraphe du chapitre VI.
  
- Tableaux VII-A, VII-B et VII-C : Liste des règles de somme issues du croisement liant les ondes S(VII-A); S et P (VII-B) ; S, P et D (VII-C). Les polynômes de Jacobi sont désignés par  $J_n^{2\ell+1,0}(s)$ .



|                                               |
|-----------------------------------------------|
| $4.067f_2(0.0341) < f_o(3.839) - f_o(0.0341)$ |
| $3.061f_2(0.0730) > f_o(3.654) - f_o(0.0730)$ |
| $1.428f_2(0.304) < f_o(0.304) - f_o(2.543)$   |
| $1.633f_2(0.325) > f_o(0.325) - f_o(2.463)$   |
| $3.061f_2(0.589) > f_o(0.237) - f_o(0.589)$   |
| $3.252f_2(0.803) < f_o(0.199) - f_o(0.803)$   |
| $1.498f_2(0.572) < f_o(0.572) - f_o(1.087)$   |
| $2.050f_2(0.572) > f_o(0.572) - f_o(1.294)$   |
| $3.267f_2(0.747) < f_o(3.052) - f_o(0.747)$   |
| $3.061f_2(0.826) > f_o(2.953) - f_o(0.826)$   |
| $1.620f_2(2.288) < f_o(2.288) - f_o(1.244)$   |
| $1.929f_2(2.288) > f_o(2.288) - f_o(1.091)$   |
| $1.633f_2(2.857) > f_o(2.857) - f_o(0.377)$   |
| $1.630f_2(3.102) < f_o(3.102) - f_o(0.296)$   |
| $3.066f_2(3.106) < f_o(0.0619) - f_o(3.106)$  |
| $3.061f_2(3.536) > f_o(0.0322) - f_o(3.536)$  |

TABLEAU I.a

|          |           |
|----------|-----------|
| .002167  | .002267   |
| .001542  | .001451   |
| .0005121 | .0005126  |
| .000563  | .0005583  |
| .000748  | .000406   |
| .000610  | .000648   |
| .000388  | .000397   |
| .000531  | .000496   |
| .000664  | .000641   |
| .000558  | .000535   |
| .0000340 | .0000643  |
| .0000404 | -.0000106 |
| .0000123 | -.000048  |
| .000006  | .000263   |
| .000012  | .000074   |
| .000003  | -.00096   |

TABLEAU I.b



$$\delta_1 = f_o(0.185) - f_o(1.168)$$

$$\delta_2 = f_o(3.390) - f_o(0.408)$$

$$\delta_3 = f_o(3.770) - f_o(0.0758)$$

$$\delta_4 = f_o(0.0871) - f_o(2.737)$$

$$\delta_5 = f_o(0.537) - f_o(2.363)$$

$$\delta_6 = f_o(3.904) - f_o(0.00663)$$

$$3.163f_2(1.168) + 1.347f_2(0.185) < \delta_1 < 3.169f_2(1.168) + 1.422f_2(0.185)$$

$$3.147f_2(0.408) + 1.632f_2(3.390) < \delta_2 < 3.492f_2(0.408) + 1.632f_2(3.390)$$

$$3.896f_2(0.075) + 1.633f_2(3.770) < \delta_3 < 4.391f_2(0.075) + 1.633f_2(3.770)$$

$$1.303f_2(0.087) + 3.073f_2(2.737) < \delta_4 < 1.380f_2(0.087) + 3.073f_2(2.737)$$

$$1.494f_2(0.537) - 1.623f_2(2.363) < \delta_5 < 1.510f_2(0.537) - 1.622f_2(2.363)$$

$$4.347f_2(0.006) - 3.061f_2(3.904) < \delta_6 < 6.503f_2(0.06) - 3.061f_2(3.904)$$

TABLEAU II.a

| $\Delta_1 D$ | $\delta$ | $\Delta_2 D$ |
|--------------|----------|--------------|
| 0.000946     | 0.000903 | 0.000967     |
| 0.000985     | 0.001058 | 0.001093     |
| 0.001934     | 0.001965 | 0.002180     |
| 0.000669     | 0.000613 | 0.000707     |
| 0.000371     | 0.000395 | 0.000375     |
| 0.002430     | 0.002656 | 0.003632     |

TABLEAU II.b



| N | $W_N(V^2)$                                                                          | $\text{Im}\{W_N\}; x = \frac{\sqrt{s}}{2}$                       | Comportement de $W_N$<br>au voisinage de $s=4$<br>$y$                                                      |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | $V^2$                                                                               | $-\pi\{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}\}$ | $-y + \dots$                                                                                               |
| 4 | $V^4 - \frac{\pi^2}{2} V^2$                                                         | $-2\pi\{x^3 + \frac{x^5}{2} + \frac{37}{120}x^7\}$               | $\frac{\pi^2}{2}y + (\dots)y^2$<br>$+ (\frac{4\pi^2}{45} - \frac{\pi^2}{2})y^3$                            |
| 6 | $V^6 - \frac{5\pi^2}{4} V^4 + \frac{7\pi^4}{16} V^2$                                | $3\pi\{x^5 + \frac{5\pi^7}{6}\}$                                 | $-\frac{7\pi^4}{16}y + (\dots)y^2$<br>$+ (\frac{5\pi^2}{6} - \dots)y^3$                                    |
| 8 | $V^8 - \frac{7\pi^2}{3} V^6$<br>$+ \frac{49\pi^4}{24} V^4 - \frac{31\pi^6}{48} V^2$ | $-4\pi x^7$                                                      | $\frac{31\pi^6}{48}y + (\dots)y^2$<br>$+ (\frac{7\pi^2}{3} - \frac{49\pi^4}{24} - \frac{31\pi^6}{270})y^3$ |

TABLEAU III



$$\Delta = Af_0^0(4) + Bf_0^2(4) - af_0^0(0) - bf_0^2(0) - cf_1^1(0) > 0$$

| a             | b             | c               | A             | B             |
|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0               | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{12}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 0             |
| 1             | -1            | $-\frac{27}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 0             |
| 1             | -1            | 0               | 0             | $\frac{3}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{4}$   | 0             | $\frac{3}{2}$ |

Tableau IV - A

| $\Delta$ |
|----------|
| 0.0101   |
| 0.0229   |
| 0.0247   |
| 0.0186   |
| 0.0172   |

Tableau IV - C

$$\Delta_1 = A'f_0^0(0) + B'f_0^2(0) - \frac{1}{4} \int_0^4 \{af_0^0(s) + bf_0^2(s) + cf_1^1(s)\} ds > 0$$

$$\Delta_2 = A'f_0^0(0) + B'f_0^2(0) + C'f_1^1(0) - \frac{1}{8} \int_0^4 \{af_0^0(s) + bf_0^2(s) + cf_1^1(s)\} s ds > 0$$

| a             | b             | c               | A'             | B'            | C'             |
|---------------|---------------|-----------------|----------------|---------------|----------------|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0               | $\frac{1}{3}$  | $\frac{2}{3}$ | 0              |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{12}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{5}$  |
| 1             | -1            | $-\frac{27}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | 3             | $-\frac{3}{5}$ |
| 1             | -1            | 0               | 0              | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{4}$   | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ |

Tableau IV - B

| $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
|------------|------------|
| 0.0046     | 0.0023     |
| 0.0049     | 0.0024     |
| 0.0058     | 0.0029     |
| 0.0054     | 0.0028     |
| 0.0046     | 0.0024     |

Tableau IV - D



$$\Delta_1 = f_0^0(s) - f_0^2(s) + 9 \cos \theta_s f_1^1(s)$$

$$\Delta_2 = f_0^0(t) - f_0^2(t) - 9 \cos \theta_t f_1^1(t)$$

$$\Delta_1 > \Delta_2$$

| s      | t      | $\cos \theta_s$ | $\cos \theta_t$ |
|--------|--------|-----------------|-----------------|
| 0.2389 | 1.8806 | 0               | -0.7746         |
| 0.3805 | 1.8098 | 0               | -0.6526         |
| 0.2937 | 2.4226 | -0.3073         | -0.6276         |
| 0.1737 | 2.4584 | -0.2850         | -0.7746         |
| 3.8007 | 0.0997 | 0               | 0.9489          |
| 3.3719 | 0.3140 | 0               | 0.8296          |
| 2.6880 | 1.0034 | -0.5296         | 0.7940          |
| 3.6985 | 0.2365 | -0.5685         | 0.9654          |

Tableau V - A

| $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
|------------|------------|
| -0.16342   | -0.17148   |
| -0.14543   | -0.15191   |
| -0.00242   | -0.00806   |
| -0.02410   | -0.03127   |
| 0.33584    | 0.32000    |
| 0.26673    | 0.25972    |
| 0.26226    | 0.25829    |
| 0.34268    | 0.32776    |

Tableau V - C

$$\Delta_1 = f_0^0(s) - f_0^2(s) + 3 \cos \theta_s f_1^1(s)$$

$$I) \Delta_1 > \Delta_2$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{3} f_0^0(t) + \frac{2}{3} f_0^2(t) - 6 \cos \theta_t f_1^1(t)$$

$$II) \Delta_1 < \Delta_2$$

|    | s      | t      | $\cos \theta_s$ | $\cos \theta_t$ |
|----|--------|--------|-----------------|-----------------|
| I  | 0.2389 | 1.8806 | 0               | -0.7746         |
|    | 0.3578 | 1.8211 | 0               | -0.6716         |
|    | 0.1982 | 2.9529 | -0.5534         | -0.6214         |
|    | 0.1103 | 3.0212 | -0.5534         | -0.7746         |
|    | 3.6564 | 0.1718 | 0               | 0.9102          |
|    | 3.3719 | 0.3140 | 0               | 0.8296          |
|    | 2.6097 | 1.0873 | -0.5642         | 0.7920          |
|    | 3.3887 | 0.4803 | -0.5716         | 0.9256          |
| II | 2.2317 | 0.3505 | 0.6035          | 0.2230          |
|    | 2.2834 | 0.1935 | 0.7746          | 0.1997          |
|    | 1.8806 | 0.2389 | 0.7746          | 0               |
|    | 1.7874 | 0.4252 | 0.6156          | 0               |
|    | 0.9459 | 2.7419 | -0.7956         | 0.5038          |
|    | 0.3140 | 3.3719 | -0.8296         | 0               |

Tableau V - B

| $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
|------------|------------|
| -0.16342   | -0.17113   |
| -0.14833   | -0.15487   |
| -0.07368   | -0.07502   |
| -0.08250   | -0.08433   |
| 0.31158    | 0.30088    |
| 0.26674    | 0.26059    |
| 0.19106    | 0.18810    |
| 0.28564    | 0.27698    |
| 0.05283    | 0.05782    |
| 0.04796    | 0.05485    |
| -0.02163   | -0.01427   |
| -0.02153   | -0.01634   |
| 0.03772    | 0.04182    |
| -0.01603   | -0.00927   |

Tableau V - D



| D        | $\delta_1^f$ |
|----------|--------------|
| 0.01138  | 0.01220      |
| 0.00823  | 0.00800      |
| 0.003157 | 0.003231     |
| 0.003554 | 0.003528     |
| 0.005548 | 0.003567     |
| 0.005154 | 0.00557      |
| 0.002745 | 0.003052     |
| 0.003757 | 0.003646     |
| 0.005360 | 0.005377     |
| 0.004784 | 0.004775     |
| 0.000879 | 0.001402     |
| 0.001047 | 0.000936     |
| 0.000429 | 0.000169     |
| 0.000273 | 0.001940     |
| 0.000509 | 0.001114     |
| 0.000144 | -0.00496     |

Tableau VI - A

$$\Delta_1^D < \delta_2^f < \Delta_2^D$$

| $\Delta_1^D$ | $\delta_2^f$ | $\Delta_2^D$ |
|--------------|--------------|--------------|
| 0.00736      | 0.00741      | 0.00748      |
| 0.00657      | 0.00718      | 0.00728      |
| 0.01047      | 0.01085      | 0.01179      |
| 0.00442      | 0.00454      | 0.00463      |
| 0.00199      | 0.00203      | 0.00202      |
| 0.01255      | 0.01397      | 0.01878      |

Tableau VI - B



$$R_n \equiv \int_0^4 ds(4-s) \sum_{\ell=0}^2 \{ (4-s)^{\ell} J_n^{2\ell+1,0}(\frac{s}{2}-1) \sum_{I=0}^2 \alpha_{\ell,n}^I f_{\ell}^I(s) \} = 0$$

| n | $\ell=0$ ; $I=0$ | $\ell=0$ ; $I=2$ |
|---|------------------|------------------|
| 1 | 2                | -5               |
| 2 | 1                | 2                |

TABLEAU VII-a

| n | $\ell=0$ ; $I=0$ | $\ell=0$ ; $I=2$ | $\ell=1$ ; $I=1$ |
|---|------------------|------------------|------------------|
| 3 | 1                | 0                | 2                |
| 6 | 2                | -5               | -6               |
| 9 | 2                | -5               | 15               |

TABLEAU VII-b

| n  | $\ell=0$ ; $I=0$ | $\ell=0$ ; $I=2$ | $\ell=1$ ; $I=1$ | $\ell=2$ ; $I=0$ | $\ell=2$ ; $I=2$ |
|----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 4  | 2                | -5               | 0                | 4                | -10              |
| 5  | 2                | 4                | 0                | -5               | -10              |
| 7  | 2                | -5               | 0                | -10              | 25               |
| 8  | 1                | 2                | 0                | 1                | 2                |
| 10 | 2                | 4                | 0                | -7               | -14              |
| 11 | 8                | -20              | -27              | 14               | -35              |
| 12 | 1                | 2                | 0                | 2                | 4                |
| 13 | 10               | -25              | 189              | 56               | -140             |
| 14 | 2                | -5               | -9               | 6                | -15              |
| 15 | 1                | 2                | 0                | 3                | 6                |

TABLEAU VII-c



# LEGENDE DES FIGURES

- Fig.1 - 1-A : Domaine d'analyticité  $D_k$  de  $S_\ell(k)$ .
- 1-B : Domaine  $D_u$ , image de  $D_k$  par la transformation conforme  $u = (\sqrt{(1+k^2)(4+k^2)} + k^2 - 2)/3k$ .
- 1-C : Domaine  $D_z$ , image de  $D_u$  par  $z = (u-u_0)/(1-u_0u)$ .
  
- Fig.2 - : Représentation schématique du domaine d'analyticité  $D$  des ondes partielles. Les contours  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont ceux utilisés au cours des chapitres V et VI pour la paramétrisation des ondes  $S$ .
  
- Fig.3 - Courbe I: Allure de l'onde  $S$  sur le domaine non physique. Il s'agit de la paramétrisation du chapitre V correspondant à la détermination :  
 $a_0 = -0.1$ ;  $t = 0.96$ ;  $\lambda = 18$ .
  
- Courbe II: Représentation de  $f_0(s) + 5f_2(s)$ .
  
- Courbe III: Indication de l'ordre de grandeur de l'onde  $D$  associée à l'onde  $S$ .
  
- Fig.4 - Courbe I: Ondes  $D$  correspondant à la détermination (V;§VI). Les bornes inférieures ( $\blacktriangle$ ) et supérieures ( $\blacktriangledown$ ) sont fournies par les résultats du tableau I-A appliqués à l'onde  $S$  de la figure (3).
  
- Courbe II: Représentation de  $\hat{f}_2(s)$ , contribution de l'onde  $S$  à la représentation de Froissart-Gribov pour l'onde  $D$ .



(52)

- Fig.5 : Schéma récapitulatif des valeurs proposées pour le déphasage  $\delta_o^o(s)$ .  
Les courbes I et II délimitent les solutions proposées par J.P. Baton, G. Laurens et J. Reignier (1970).
- Fig.6 - 6-A : Déphasages  $\delta_o^o(s)$  obtenus avec le modèle du paragraphe III, chapitre VI. Les courbes I-A et I-B délimitent les variations de  $\delta_o^o(s)$  correspondant aux variations de  $\delta_o^2(s)$  situées entre les courbes I et II de la fig.(6-B). Les courbes II-A et II-B délimitent les variations d'une solution  $\delta_o^o(s)$  correspondant à un déphasage  $\delta_o^2(s)$  fixé. (Exemple - courbe II-A :  $a_o=0.16$ ,  $f_o^o(0)=-0.3525$ ,  $s_o=7.2$ ).
- 6-B : Déphasages  $\delta_o^2(s)$  fournis par le modèle (V.-7) pour  $a_2=-0.05$  (courbe I) et  $a_2=-0.09$  (courbe II). Les données expérimentales proviennent de la Réf.56.
- Fig.7 : Résultats globaux concernant les déphasages des ondes  $S^o$  (courbes I-A;I-B),  $S^2$  (courbes II-A;II-B) et  $p^1$  (courbes III-A;III-B) correspondant aux modèles du paragraphe V, chapitre VI.
- Fig.8 : Evolution des résultats de la fig. (7) avec l'adjonction des ondes D. (Paramétrisation du paragraphe VI, chapitre VI).
- Fig.9 : Famille de cinq déphasages ( $\delta_o^o, \delta_o^2, \delta_1^1, \delta_2^o, \delta_2^2$ ) choisis parmi ceux de la figure (8)  
 $a_o = 0.261$  ,  $a_2 = -0.116$  ,  $a_1 = 0.0158$   
 $f_o^o(0)=-0.139$ ,  $f_o^2(0)=0.0536$  ,  $a_2^o=0.00037$  ,  $a_2^2=0.00013$ .



- Fig.10 : Allure sur le domaine non physique des ondes S et P correspondant à la détermination de la fig.(9).
- Fig.11 : Schéma de la combinaison neutre des ondes S de la fig. (10).
- Fig.12 : Ondes D ( $D^0, D^2$  et combinaison neutre  $D^{00}$ ) correspondant à la détermination de la fig.(9). Les bornes inférieures ( $\blacktriangle$ ) et supérieures ( $\blacktriangledown$ ) proviennent des résultats du Tableau I-A appliqués aux modèles d'ondes S de la fig.(10).



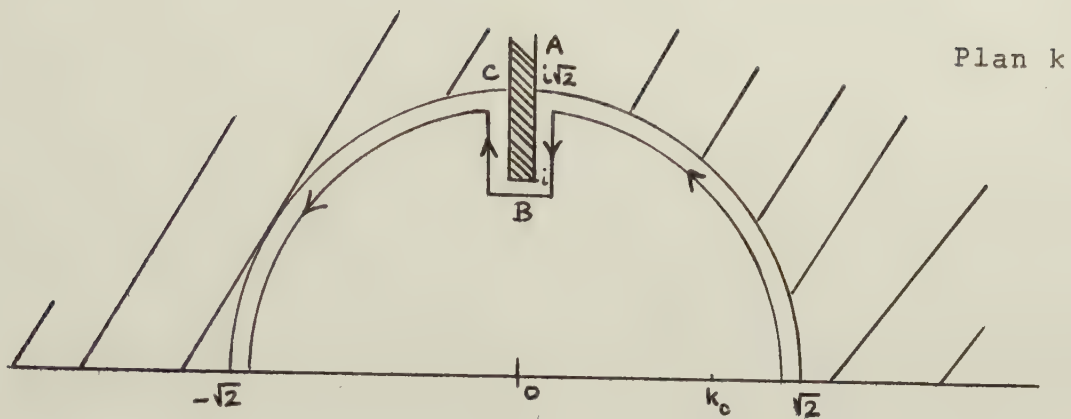


Figure 1.a

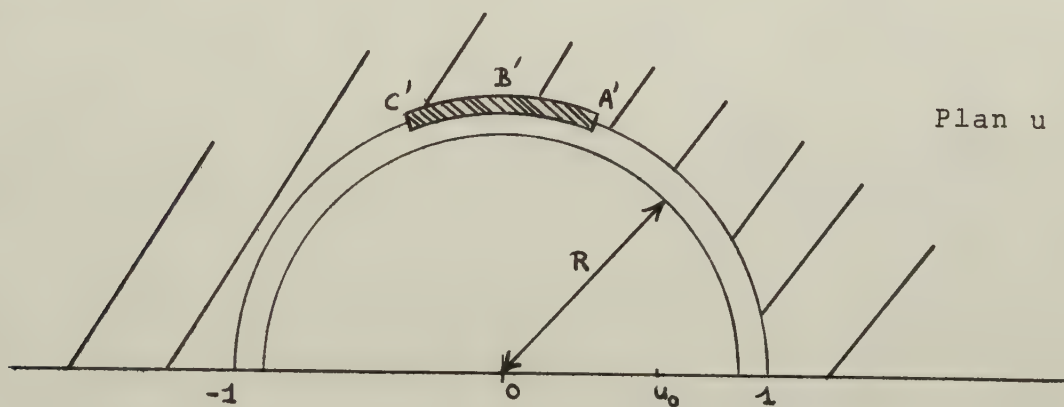


Figure 1.b

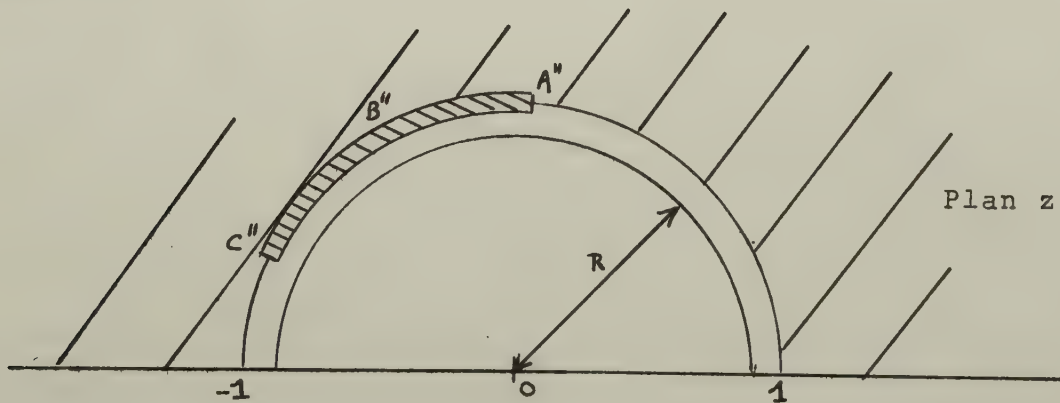


Figure 1.c



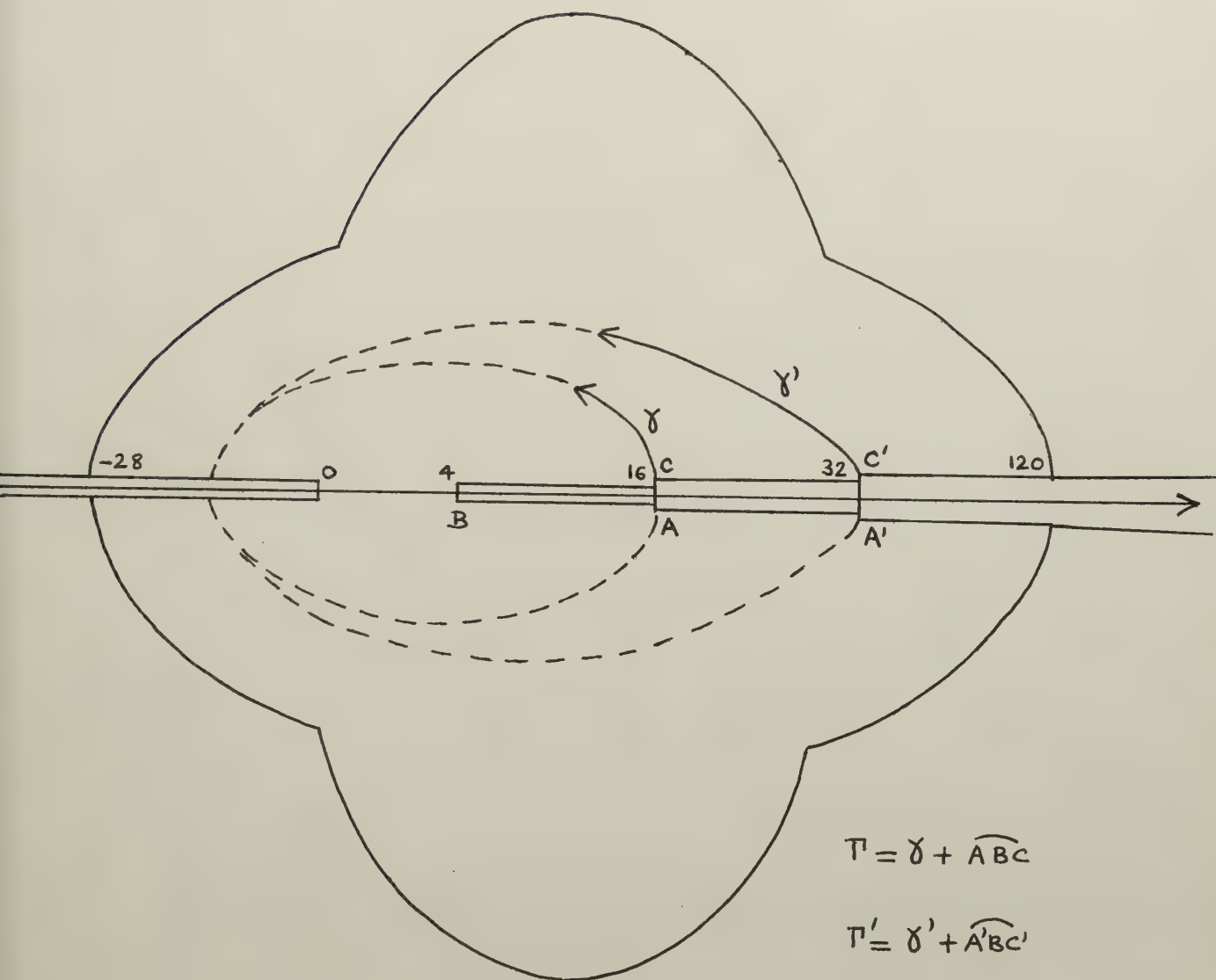


Figure 2



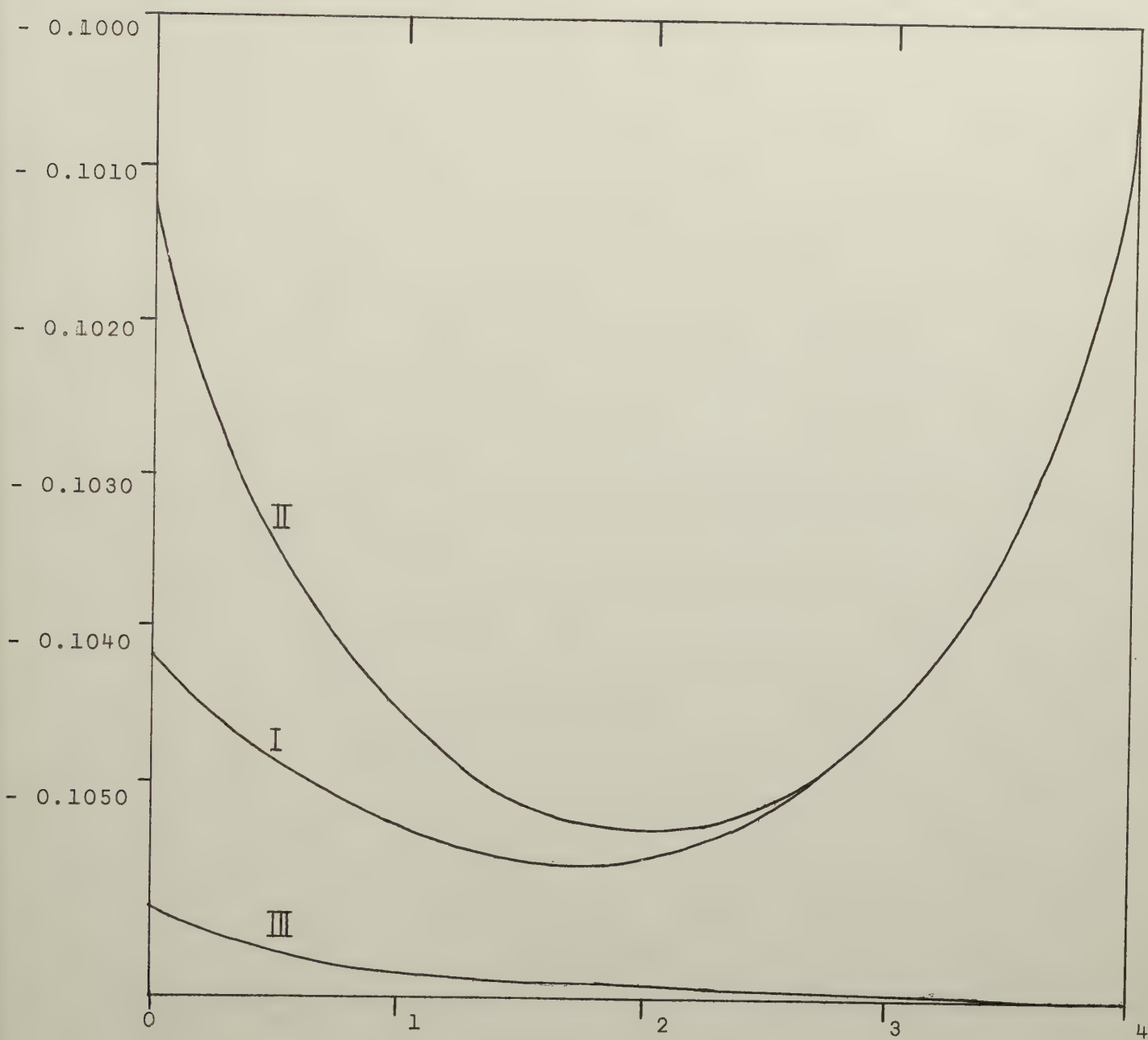


Figure 3



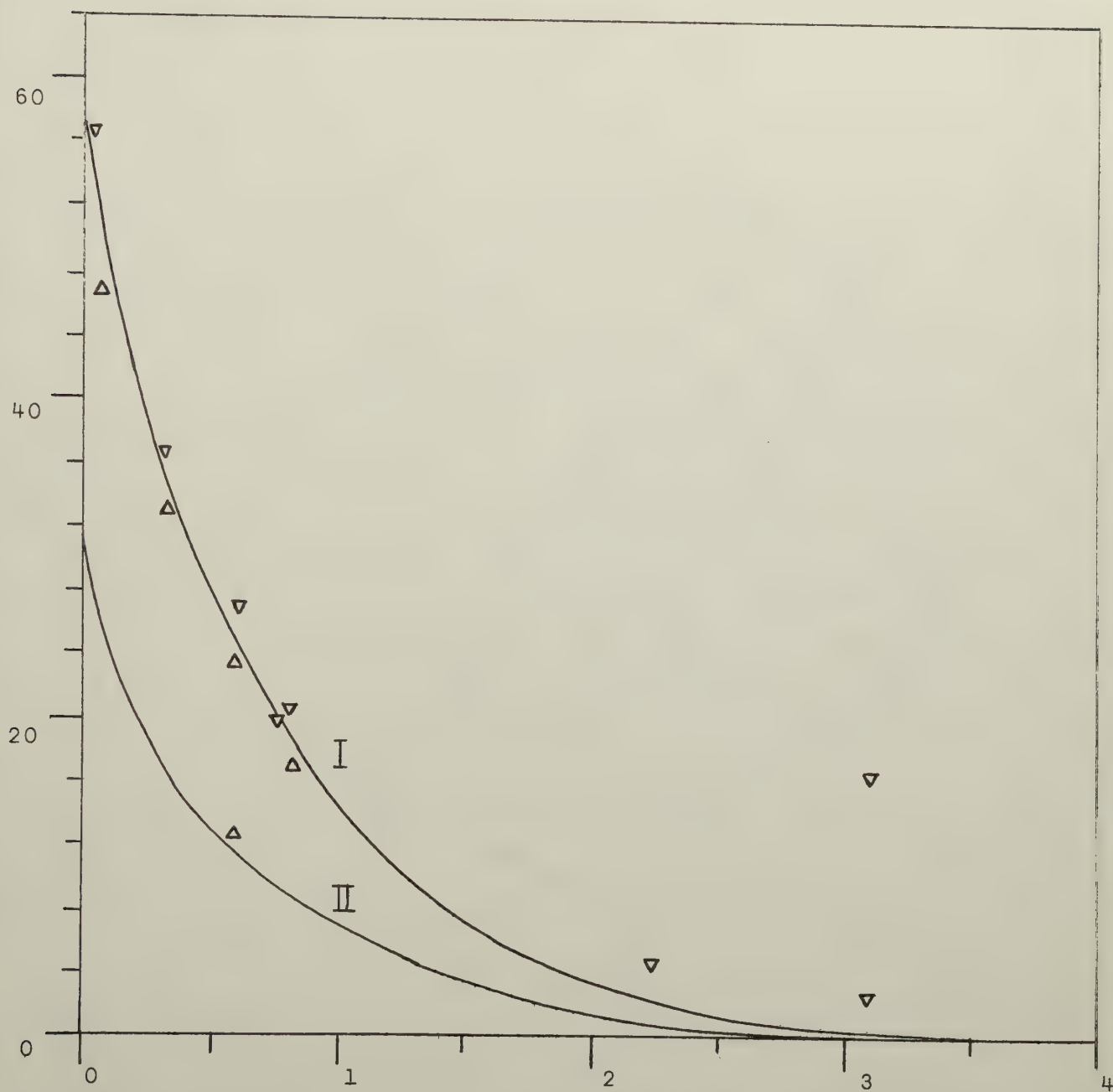


Figure 4



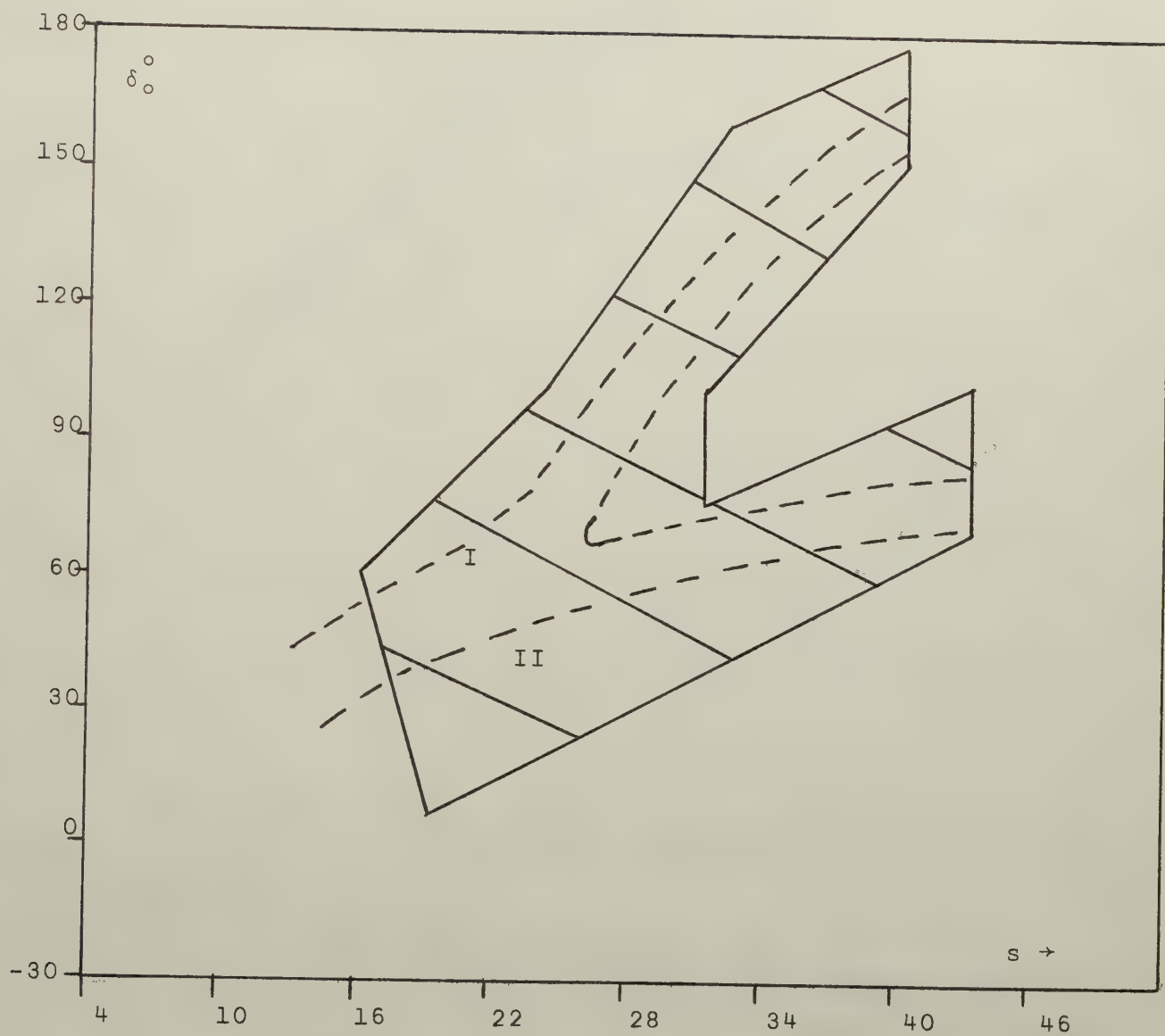


Figure: 5



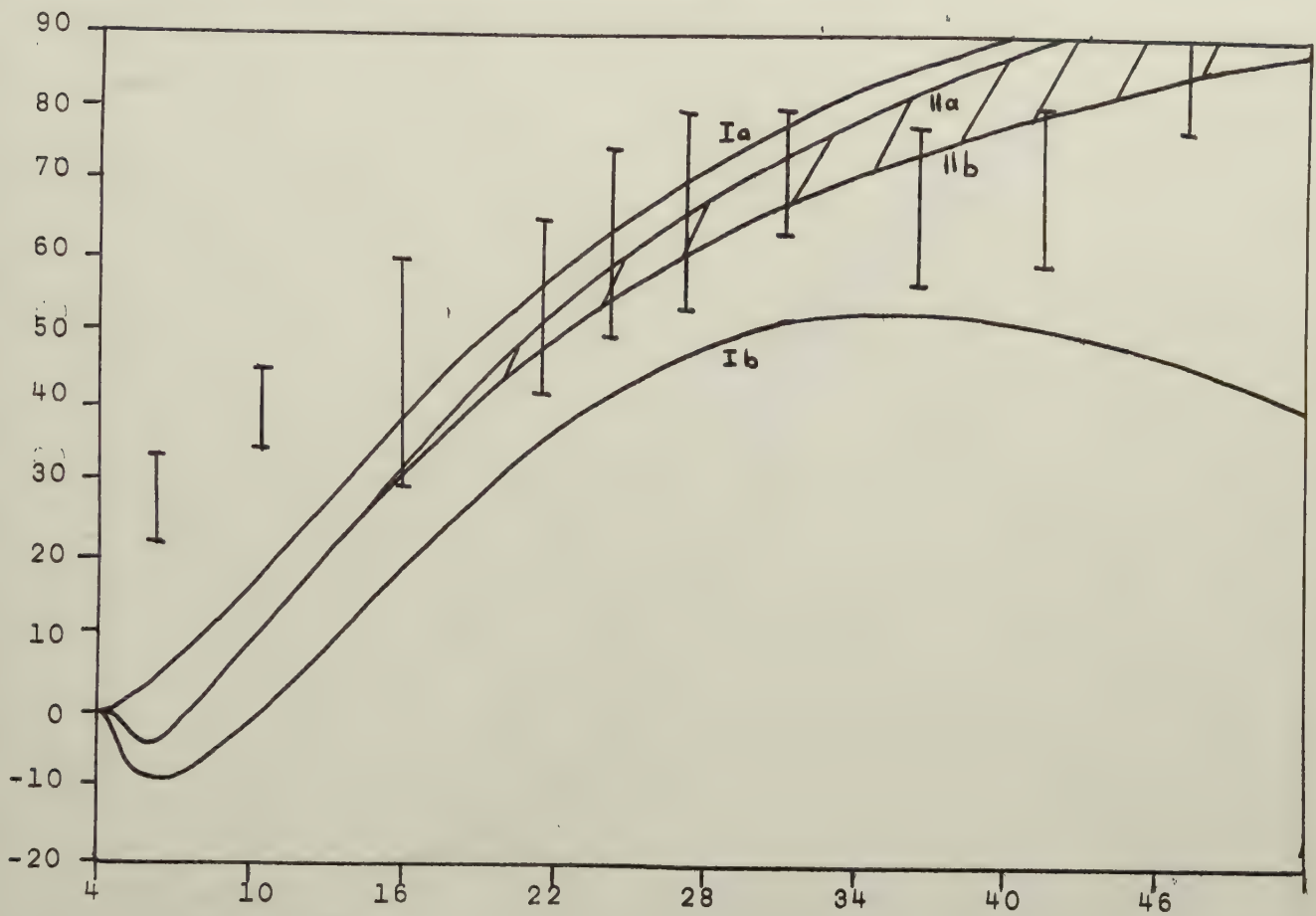


Figure 6.a

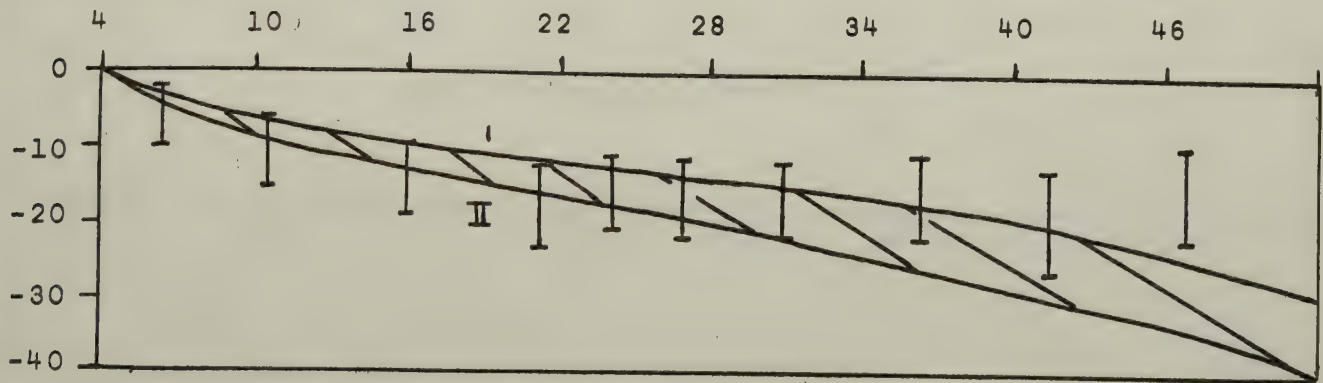


Figure 6.b



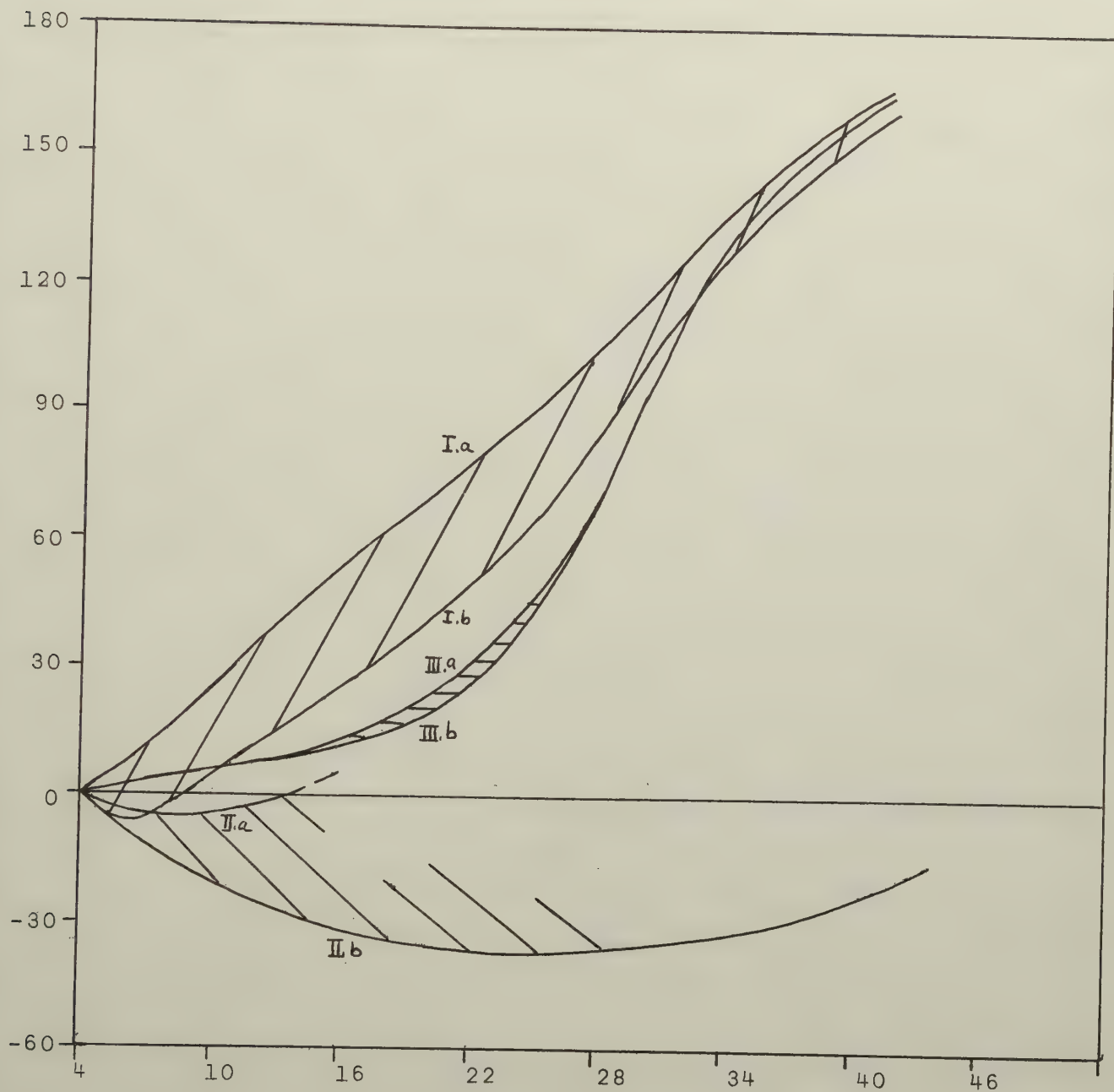


Figure 7



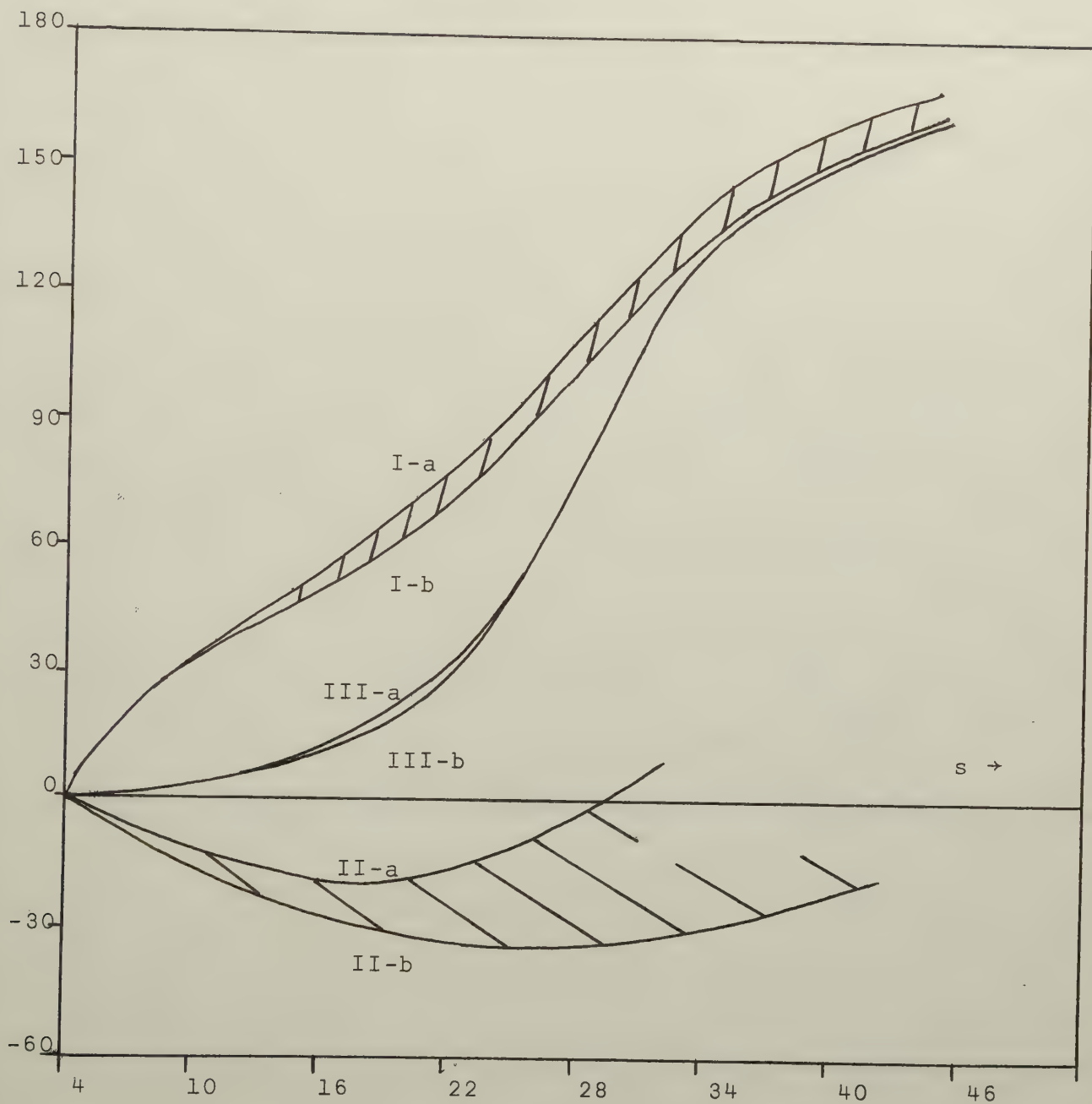


Figure 8



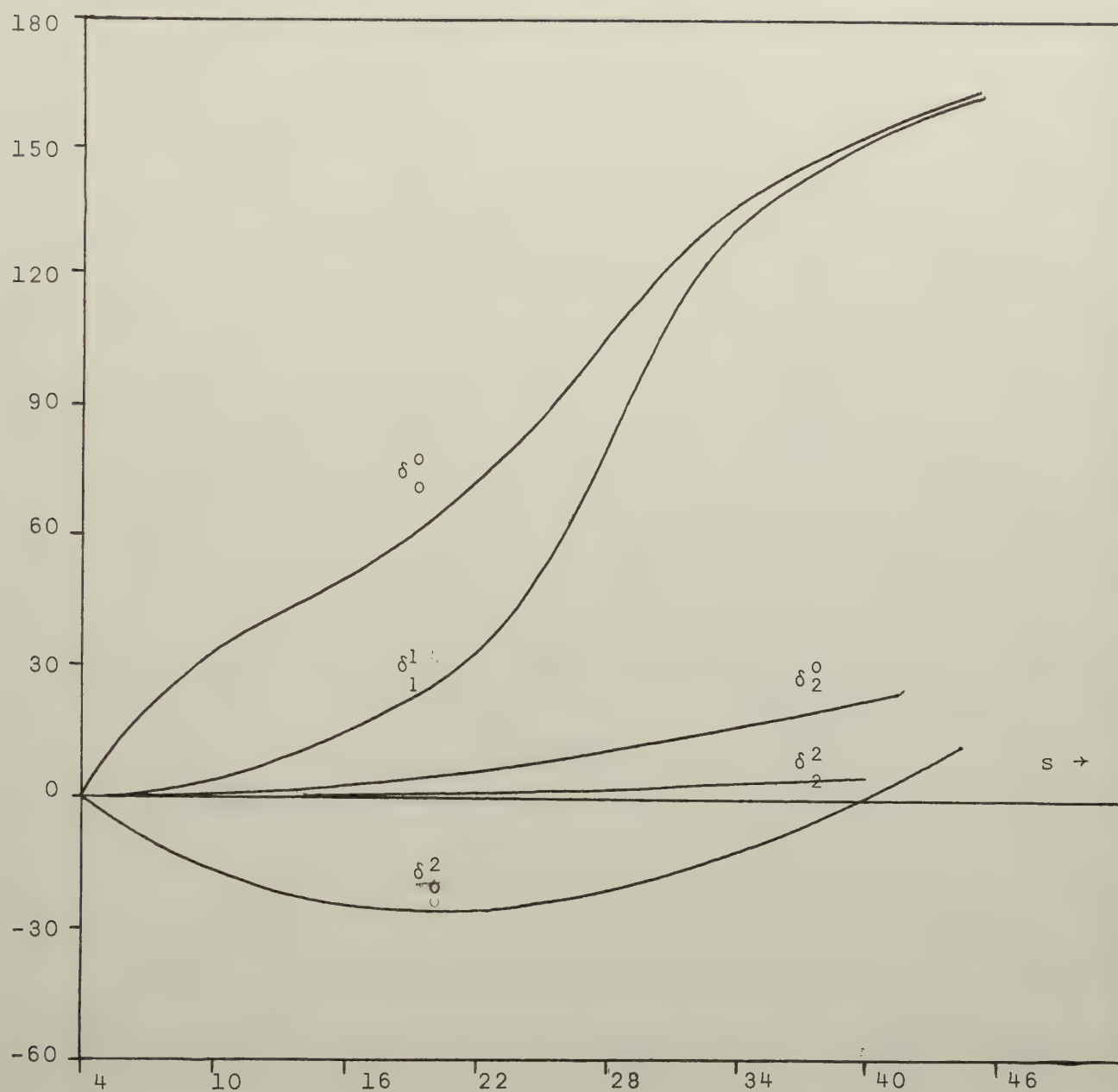


Figure 9



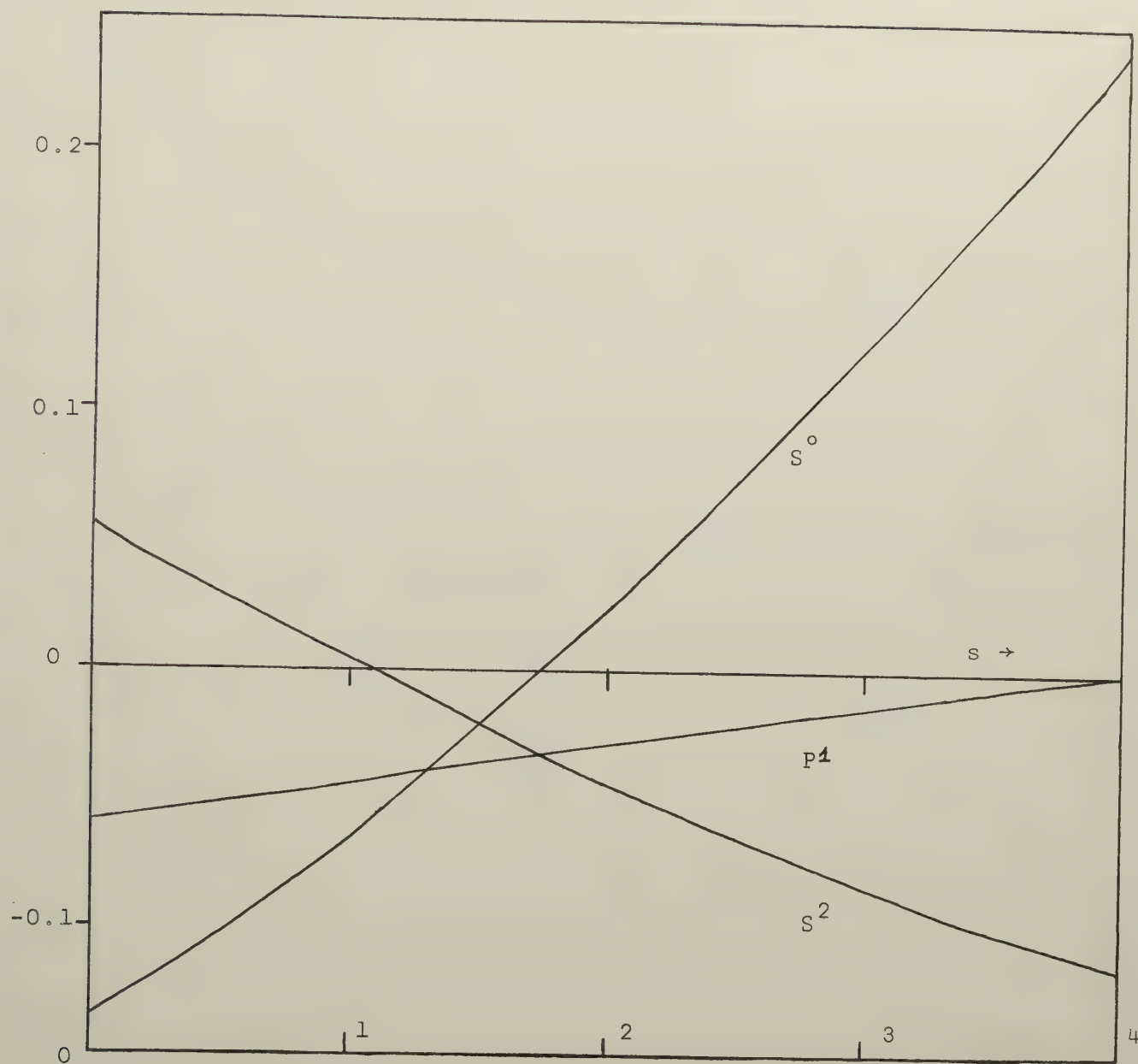


Figure 10



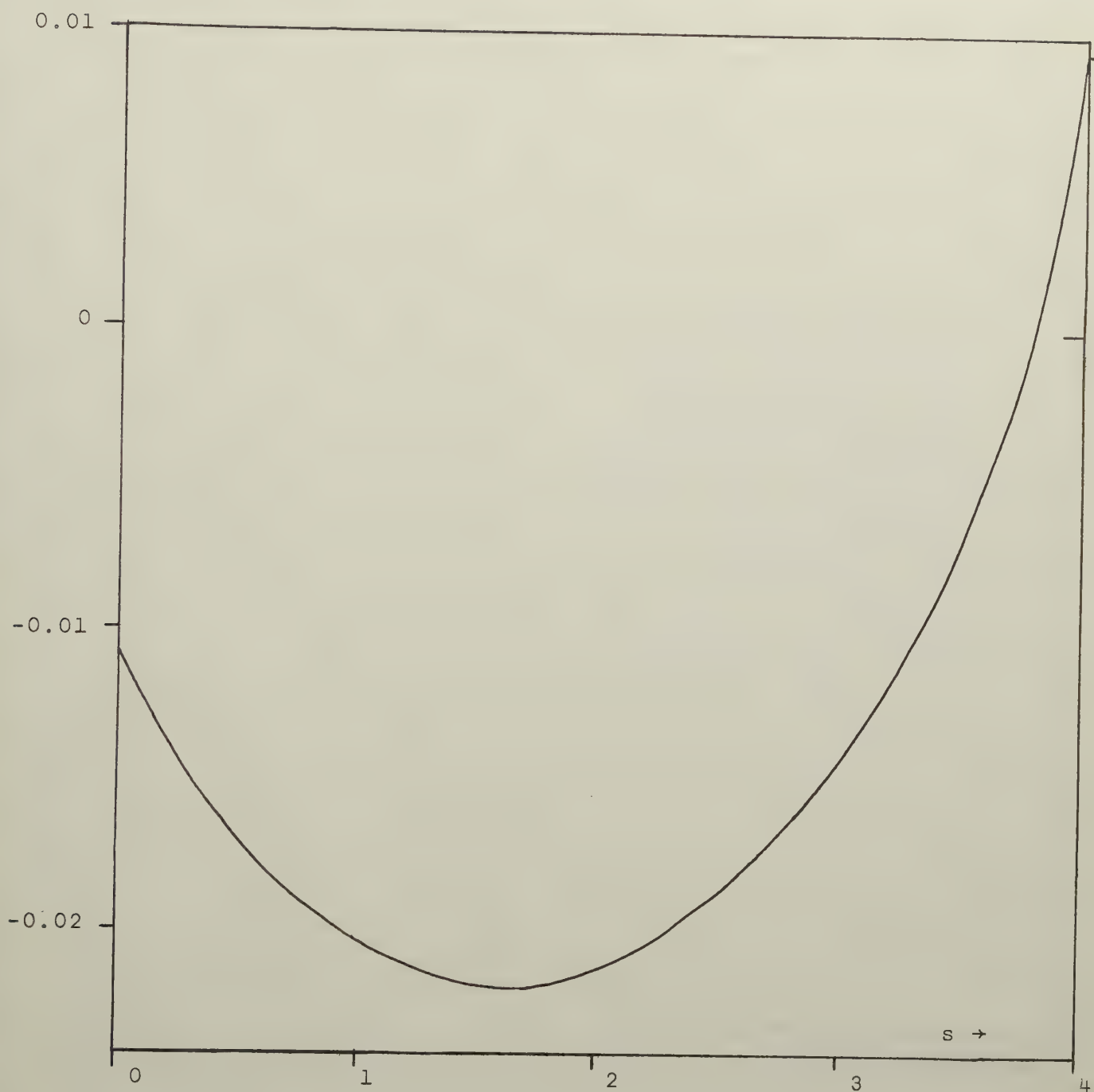


Figure 11



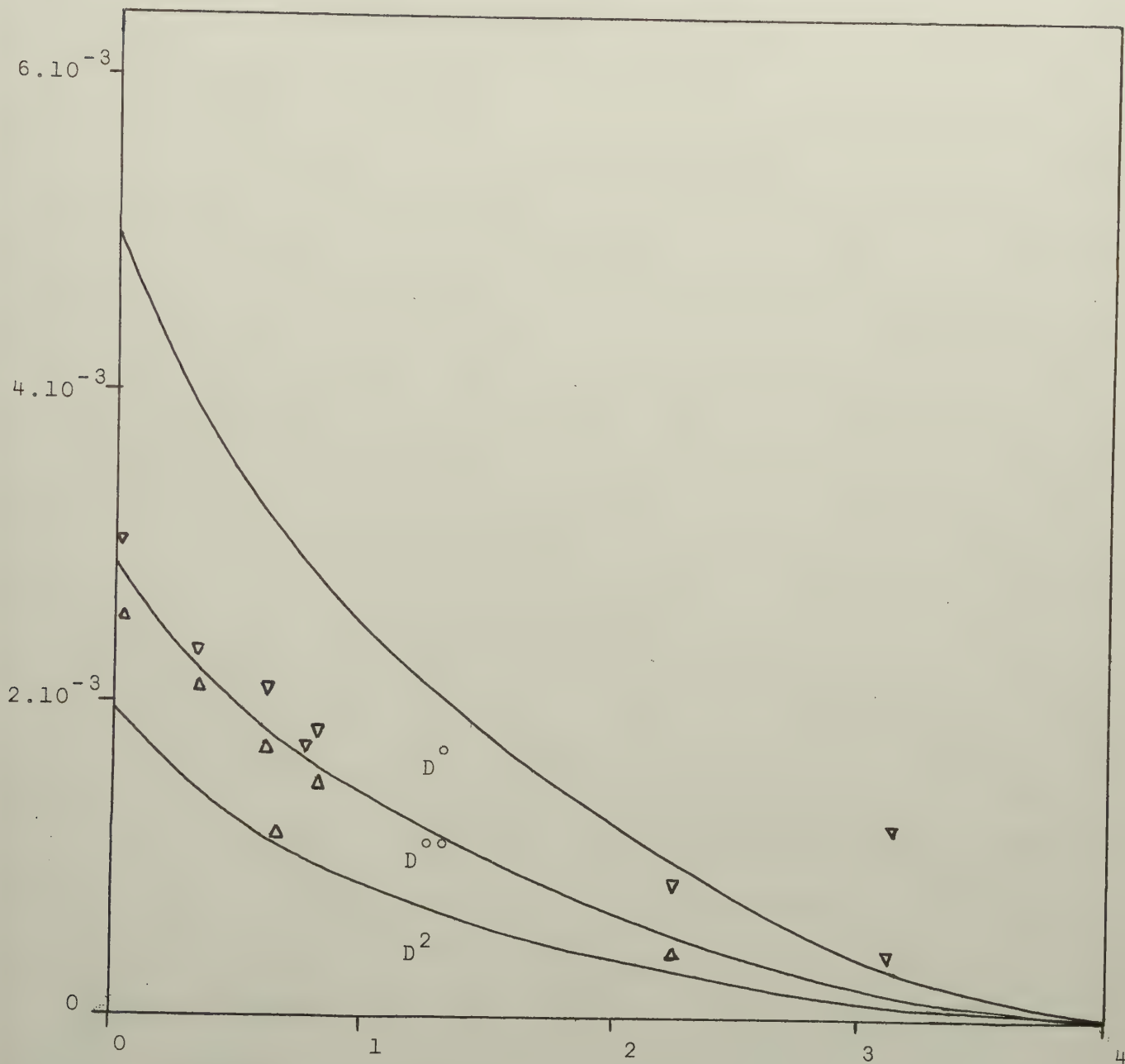


Figure 12



## DEUXIÈME THÈSE

---

Propositions données par la Faculté

"L'hypothèse de fragmentation limitée dans les collisions à hautes énergies".

Vu et approuvé

Paris, le ..... 19....

Le Doyen de la Faculté des Sciences  
de Paris

L. GAUTHIER

Vu  
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET





